Exercice n°22 (page 108 - tome 1- Manuel 4e Maths) :

f une fonction continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[.On suppose que f(0) =1 , f(1) = 0

et pour tout $x \in \left]0,\ 1\right[\ f'(x) = -\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$,

1- Montrons que f est une bijection de [0,1] sur [0,1] .

On a f est continue su [0,1] et $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur [0, 1] et par suite f est une bijection de [0,1] sur f([0,1])= [f(1), f(0)] = [0, 1].

2- a- Montrons que pour tout $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ f(cosx) = $\dfrac{2}{\pi}$x .

Posons g(x) = f(cosx) , elle est dérivable sur [0,1] et g'(x) = -sinx f'(cosx) = -sinx($-\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-\cos^2 x}}$)

= -sinx . $\left(-\dfrac{2}{\pi \sin x}\right)$ $=\dfrac{2}{\pi}$ et par suite g(x) = $\dfrac{2}{\pi}x + c$, où c est un réel ;

Or g(0) = f(cos0) = f(1) = 0 donc c = 0 et par suite : pour tout $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ f(cosx) = $\dfrac{2}{\pi}x$.

b- Déduisons f^{-1}(x), pour tout$x \in [0,\ 1]$

On a : pour tout $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, f(cosx) = $\dfrac{2}{\pi}x$. donc cosx = $f^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}x\right)$ et en posant t = $\dfrac{2}{\pi}x$, $t \in [0,\ 1]$

on obtient $\cos\dfrac{\pi}{2}t = f^{-1}(t)$, d'où pour tout $x \in [0,\ 1]$, $f^{-1}(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

3- On pose pour tout$x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, h(x) = f(cosx) + f(sinx) .

a- Montrons que h est dérivable sur $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculons h'(x).

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et l'image de $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par ces deux fonctions est l'intervalle]0,1[qui est l'intervalle de dérivabilité de f donc h est dérivable sur $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout x $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

h'(x) = -sinx . f'(cosx) +cosx . f'(sinx) = -sinx($-\frac{2}{\pi\sqrt{1-\cos^2 x}}$) +cosx($-\frac{2}{\pi\sqrt{1-\sin^2 x}}$) =$\frac{2}{\pi}$-$\frac{2}{\pi}$=0

b- Montrons que : pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, h(x) = 1.

On a h'(x) = 0 donc pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, h(x) = c , où c est un réel .

h(0) = f(cos0)+f(sin0) = f(1) +f(0) = 0+1=1 donc c = 1 et par suite ,pour tout x $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(x) = 1$

4- Pour tout n $\in \mathbb{N}^*$ on pose $\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^n$, x $\in$ [0, 1]

a- Montrons que : pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $a_n \in]0, 1[$ tel que $\varphi_n(a_n) = 0$

On a φ_n est continue et dérivable sur [0,1] .

$(\varphi_n)'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - nx^{n-1} < 0$ donc φ_n est strictement décroissante sur [0,1] et par suite

$\varphi_n([0, 1]) = [-1, 1]$ et $0 \in [-1, 1]$ donc il existe un unique $a_n \in]0, 1[$ *tel* $\varphi_n(a_n) = 0$

b- Montrons que : pour tout x $\in$]0, 1[si n > p alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$.

Etudions le signe de $\varphi_n(x) - \varphi_p(x)$:

$$\varphi_n(x) - \varphi_p(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^n\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^p\right) = x^p - x^n = x^p\left(1 - \frac{x^n}{x^p}\right) = x^p(1 - x^{n-p}) > 0$$

car dans l'intervalle [0,1] et pour n>p on a x^{n-p} est inférieur à 1

donc pour tout $x \in]0, 1[$ si $n > p$ alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$.

c- En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.

On a : pour tout $x \in]0, 1[$ si $n > p$ alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$. et $a_n \in]0, 1[$ alors $\varphi_n(a_n) > \varphi_p(a_n)$

or $\varphi_n(a_n) = 0$ et $\varphi_p(a_p) = 0$ donc on aura $\varphi_p(a_p) > \varphi_p(a_n)$ et φ_p est décroissante sur [0,1] donc on aura

alors $a_n > a_p$ .En conclusion on a pour n>p ,$a_n > a_p$ donc la suite (a_n) est strictement croissante ; et elle

est majorée par 1 donc la suite (a_n) est convergente.