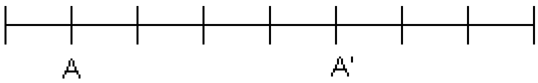
Série : Homothéties

Exercice n°1.



1) *h* est l'homothétie de centre O et de rapport –3 qui transforme A en A'. Construire O

2) *h'* est l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{3}$ qui transforme A en A'. Construire O'

Exercice n°2.

Soit $O\Omega AB$ un parallélogramme.
Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2. $C = h(A)$ et $D = h(B)$.
Soit h' l'homothétie de centre O et de rapport -2. $E = h'(B)$ et $F = h'(A)$.

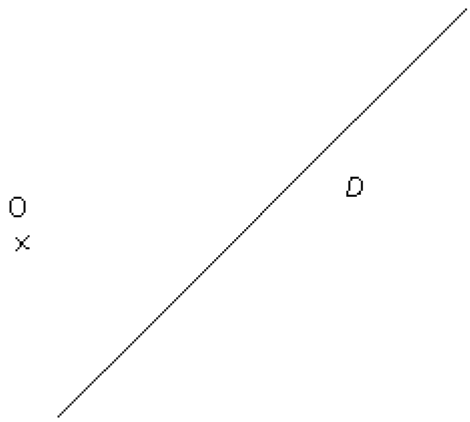
1) Montrer que $\overrightarrow{OE} = -2\overrightarrow{OB}$.
2) Montrer que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{\Omega C}$.
3) Montrer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.
4) Montrer que $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$.
5) Montrer que *F*, *E*, *C* et *D* sont alignés.

Exercice n°3.

ABC est un triangle de centre de gravité G. On nomme C', B', A' les milieux respectifs des côtés [AB], [AC]et [BC]
Démontrer qu'il existe une homothétie *h* de centre G qui transforme ABC en A'B'C'

Exercice n°4.

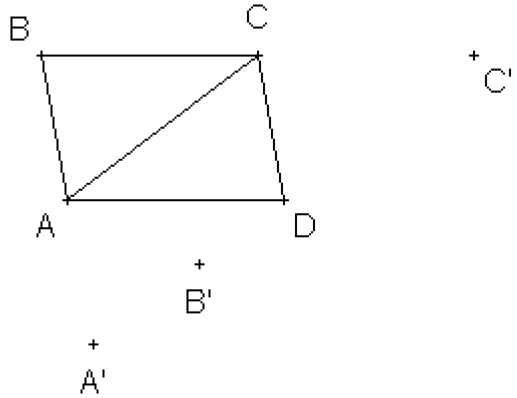
Soit *h* l'homothétie de centre O et de rapport 2,5. Construire l'image de la droite *D* par *h*.



Exercice n°5.

Soit ABCD un parallélogramme.
On construit les points suivants :
- A', symétrique de B par rapport à A
- B' symétrique de B par rapport à (AC)
- C' symétrique de B par rapport à C

Démontrer que les quatre points A',B',C' et D sont alignés



Série : Homothéties

Exercice n°6.

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Soit M le point défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$.

P est le projeté orthogonal de M sur (CD) et Q est le projeté orthogonal de M sur (AD).

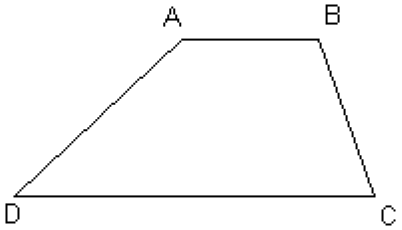
1) Montrer que $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{3}{2}$. Déterminer $h(B)$, $h(C)$ et $h(A)$

3) Quelle est la nature du quadrilatère $MPDQ$? Déterminer son périmètre et son aire.

Exercice n°7.

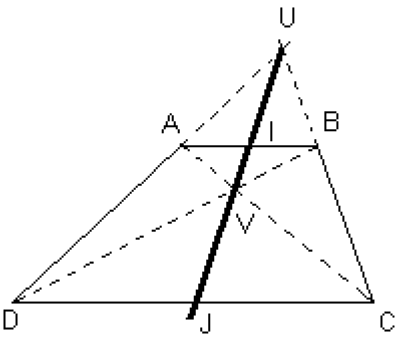
Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que $AB \neq CD$.



1) Démontrer qu’il existe deux homothéties transformant [AB] en [CD]
2) Quelle relation y a-t-il entre les rapports de ces deux homothéties ?

Exercice n°8.

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] de milieux respectifs I et J. Les droites (AB) et (BC) se coupent en U ; les droites (AC) et (BD) se coupent en V.



Démontrer que les points U,V, I et J sont alignés.

Exercice n°9.

Soient O et O′ deux points tels que $OO' = 6$. Soient Γ le cercle de centre O et de rayon 1, et Γ' le cercle de centre O′ et de rayon 2.
Montrer qu'il existe deux homothéties transformant Γ en Γ'. Préciser leurs centres et leurs rapports.

Série : Homothéties

Exercice n°10.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe une homothétie qui transforme A en A' et B en B'. Dans l'affirmative, donner ses caractéristiques (centre et rapport)

1) A(-4 ;-2) , B(2 ;1) , A'(-1 ;5) et $B'\left(\frac{2}{3};-2\right)$

2) A(-2 ;5) , B(-3,5 ;-4) , A'(0 ;4) et B'(-1 ;-2)

Exercice n°11.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On désigne par *h* l'homothétie de centre A(-1 ;2) et de rapport –2.

1) Déterminer les coordonnées du point B' image de B(1 ;3) par *h*

2) Déterminer les coordonnées du point C dont l'image par *h* est C'(3 ;-2)

Exercice n°12.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On désigne par *h* l'homothétie de centre A(4 ;-2) et de rapport $\frac{5}{3}$.

1) Soit *D* la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x+2$. Déterminer l'équation de l'image *D'* de *D* par *h*.

2) On désigne par *C* l'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ tels que $x^2+y^2+4x-6y=0$. Déterminer l'équation de l'image *C'* de *C* par *h*.

Exercice n°13.

Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soit la fonction *f* qui à tout point $M\left(x;y\right)$ fait correspondre $M'\left(x';y'\right)$ avec $\begin{cases} x'=3x-4 \\ y'=3y+2 \end{cases}$.

1) Montrer que *f* admet un unique point invariant Ω (c'est à dire un point tel que $f(\Omega)=\Omega$).

2) Pour un point quelconque *M*, exprimer $\overrightarrow{\Omega M'}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega M}$.

3) En déduire la nature de *f*.

Exercice n°14.

On définit la transformation *f* du plan par sa forme complexe : $z'+3-4i=2\left(z+3-4i\right)$

1) Quelle est la nature de l'application *f* ?

2) Déterminer l'image *C'* par *f* du cercle *C* de centre A(-2+i) et de rayon 1

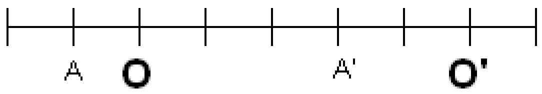
Série : Homothéties

CORRECTION

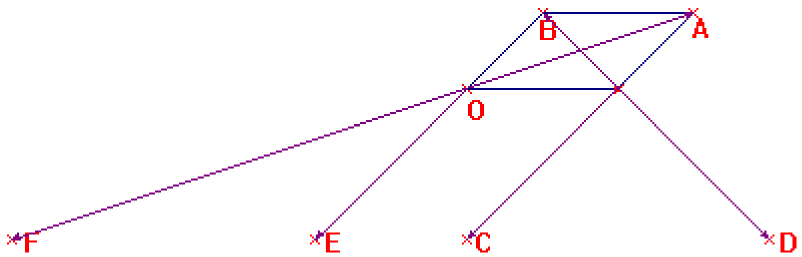
Exercice n°1

1) Si h est l'homothétie de centre O et de rapport –3 qui transforme A en A', alors $\overrightarrow{OA'}=-3\overrightarrow{OA}$, égalité qui se transforme en $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}=-3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}=-4\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA'}}$, ce qui permet ainsi de placer le point O (voir figure)

2) Si h' est l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{3}$ qui transforme A en A', alors $\overrightarrow{O'A'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{O'A}$, égalité qui se transforme en $\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{O'A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{O'A} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AO'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}}$, ce qui permet ainsi de placer le point O' (voir figure)



Exercice n°2



1) E est l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport -2. Donc $\overrightarrow{OE}=-2\overrightarrow{OB}$.

2) De même, $\overrightarrow{\Omega C}=-2\overrightarrow{\Omega A}$. Or $O\Omega AB$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{\Omega A}=\overrightarrow{OB}$. On en déduit que $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{\Omega C}$.

3) D'après 2), $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{\Omega O}$, or $O\Omega AB$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{\Omega O}=\overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$.

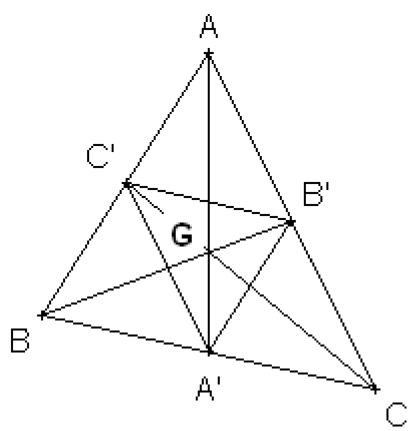
4) h est une homothétie de rapport -2 et $C=h(A)$ et $D=h(B)$, donc $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$.

5) De $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$, on déduit $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{CE}$, donc C, D et E sont alignés.
h' est une homothétie de rapport -2 et $E=h'(B)$ et $F=h'(A)$, donc $\overrightarrow{FE}=-2\overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{FE}=2\overrightarrow{EC}$, donc F, E et C sont alignés. Finalement, F, E, C et D sont alignés.

Exercice n°3

Si on note G le centre de gravité du triangle ABC (intersection des médianes), on a :
$\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

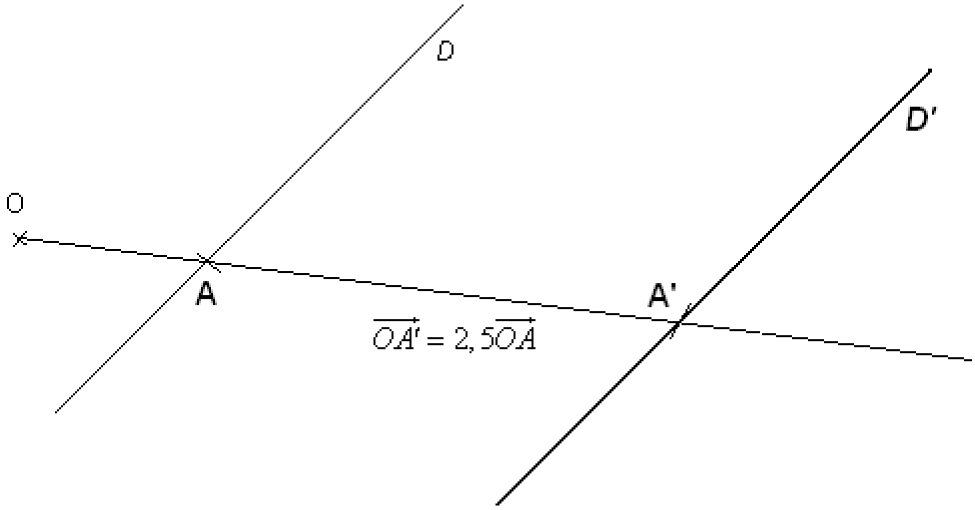
L'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme donc les points A,B et C (donc le triangle ABC) en A',B' et C' (le triangle A'B'C')



Série : Homothéties

Exercice n°4

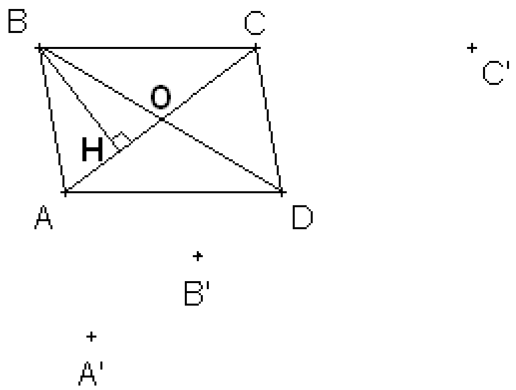
L'image de la droite D par h est une droite qui lui est parallèle.
Pour la construire, il suffit de construire l'image d'un point.
On choisit donc un point A appartenant à D et on construit son image A' par h , telle que $\overrightarrow{OA'} = 2,5\overrightarrow{OA}$
D' sera alors la droite parallèle à D passant par A'



Exercice n°5

Notons H le projeté orthogonal de B sur [AC] et O le centre du parallélogramme (intersection des diagonales)

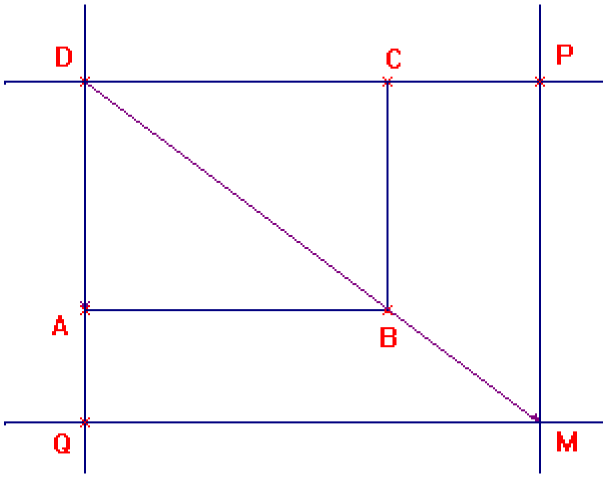
Les points A,H,O et C sont alignés sur le segment [AC]
Puisque A' est le symétrique de B par rapport à A, on a $\overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{BA}$
Puisque B' est le symétrique de B par rapport à (AC), on a $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BH}$
Puisque O est le centre du parallélogramme, on a $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$
Puisque C' est le symétrique de B par rapport à C, on a $\overrightarrow{BC'} = 2\overrightarrow{BC}$
L'homothétie de centre B et de rapport 2 transforme donc les points A,H,O,C en A',B',D et C'.
Puisque les points A,H,O et C sont alignés sur le segment [AC], leurs images A',B',D et C' seront alignés.



Série : Homothéties

Exercice n°6

1) $P \in (DC)$ et $M \in (DB)$. $(MP)//(BC)$, car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (CD). D'après le théorème de Thalès (troisième formulation), puisque $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.



2) $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ donc $h(B) = M$. $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ donc $h(C) = P$.

Et $h(A) = Q$ car $\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$ (même démonstration que pour *P*).

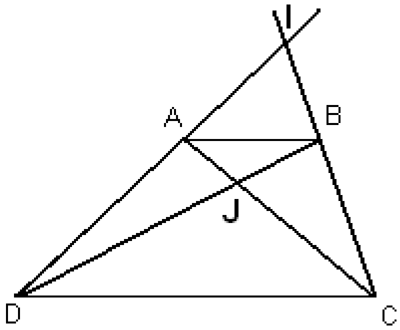
3) Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle. Donc les côtés de *MPDQ* sont parallèles à ceux de *ABCD*, donc *MPDQ* est un rectangle.

Par *h*, les longueurs sont multipliées par $\frac{3}{2}$, donc le périmètre de *MPDQ* est $\frac{3}{2}\times 2\times(4+3)$ $= 21$ cm.

Par *h*, les aires sont multipliées par $\frac{9}{4}$, donc l'aire de *MPDQ* est $\frac{9}{4}\times 4\times 3$ =27 cm^2.

Exercice n°7

Notons I le point d'intersection des droites (AD) et (BC) (qui existe car $AB \neq CD$), et J le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD]



1) Puisque les points I,A,D d'une part et I,B,C d'autre part, sont alignés, avec (AB)//(CD) (car ABCD est un trapèze), les points I,A,B,D,C sont en configuration de Thalès

L'homothétie de centre I et de rapport $\frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD}$ transforme le segment [AB] en [CD]

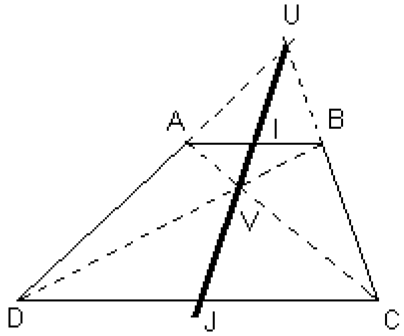
Puisque les points A,J,C d'une part et B,J,D d'autre part, sont alignés, avec (AB)//(CD) (car ABCD est un trapèze), les points J,A,B,D,C sont en configuration de Thalès (dite « en papillon »)

L'homothétie de centre J et de rapport $\frac{JA}{JC} = \frac{JB}{JD} = \frac{AB}{CD}$ transforme le segment [AB] en [CD]

2) Les deux rapports de ces deux homothéties sont égaux à $\frac{AB}{CD}$

Série : Homothéties

Exercice n°8



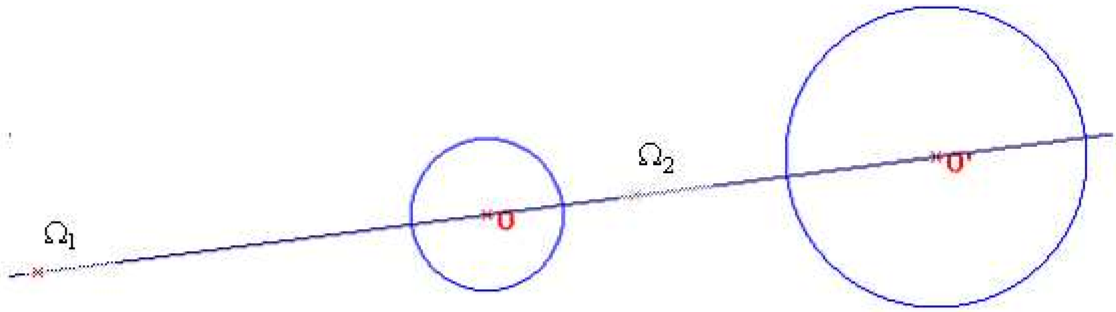
D'après l'exercice précédent, l'homothétie de centre U transforme [AB] en [CD], donc le milieu I de [AB] en le milieu J de [CD], de sorte que les points U,I et J sont alignés (un point, son image et le centre de l'homothétie sont alignés)
De plus, l'homothétie de centre V transforme [AB] en [CD], donc le milieu I de [AB] en le milieu J de [CD], de sorte que les points V,I et J sont alignés (un point, son image et le centre de l'homothétie sont alignés)
Les points U,I,V et J sont donc alignés.

Exercice n°9

Comme Γ est de rayon 1 et Γ' de rayon 2, et puisque par une homothétie de rapport k les longueurs sont multipliées par $|k|$, on a $|k|=2$, donc $k=2$ ou $k=-2$.

Le centre Ω_1 de l'homothétie de rapport 2 transformant Γ en Γ' est tel que $\overrightarrow{\Omega_1 O'}=2\overrightarrow{\Omega_1 O}$, soit O est le milieu de $[\Omega_1 O']$, c'est à dire que Ω_1 est le symétrique de O' par rapport à O.

Le centre Ω_2 de l'homothétie de rapport -2 transformant Γ en Γ' est tel que $\overrightarrow{\Omega_2 O'}=-2\overrightarrow{\Omega_2 O}$, soit $\overrightarrow{O\Omega_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OO'}$, d'où la construction de Ω_2.



Exercice n°10

1) Pour qu'il existe une unique homothétie transformant A en A' et B en B', il est nécessaire et suffisant que les droites (AA') et (BB') ne soient pas parallèles (donc que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ne soient pas colinéaires), et que les droites (AB) et (A'B') soient parallèles (donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient colinéaires)

On calcule $\overrightarrow{AA'}(3;7)$ et $\overrightarrow{BB'}\left(-\frac{4}{3};-3\right)$.

Il n'existe pas de réel unique h tel que $-\frac{4}{3}=3h$ et $-3=7h$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ne sont pas colinéaires.

On calcule $\overrightarrow{AB}(6;3)$ et $\overrightarrow{A'B'}\left(\frac{5}{3};-7\right)$.

Il n'existe pas de réel unique h tel que $\frac{5}{3}=6h$ et $-7=3h$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne soient pas colinéaires.

Il n'existe donc pas d'homothétie transformant A en A' et B en B'

2) Pour qu'il existe une unique homothétie transformant A en A' et B en B', il est nécessaire et suffisant que les droites (AA') et (BB') ne soient pas parallèles (donc que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ne soient pas colinéaires), et que les droites (AB) et (A'B') soient parallèles (donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient colinéaires)

On calcule $\overrightarrow{AA'}(2;-1)$ et $\overrightarrow{BB'}(2,5;2)$.

Il n'existe pas de réel unique h tel que $2,5=2h$ et $2=(-1)\times h$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ne sont pas colinéaires.

On calcule $\overrightarrow{AB}(-1,5;-9)$ et $\overrightarrow{A'B'}(-1;-6)$.

On remarque que $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Série : Homothéties

Le rapport de l'homothétie vaut donc $k=\frac{2}{3}$ et le centre O de l'homothétie vérifie donc $\overrightarrow{OA'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

Si on note $O(x;y)$, les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OA'}$ sont données par $\overrightarrow{OA}(-2-x;5-y)$ et $\overrightarrow{OA'}(0-x;4-y)$.

L'égalité $\overrightarrow{OA'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ se traduit donc par le système $\begin{cases}-x=\frac{2}{3}(-2-x)\\ 4-y=\frac{2}{3}(5-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x=-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x\\ 4-y=\frac{10}{3}-\frac{2}{3}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$

L'homothétie de centre O(4 ;2) et de rapport $k=\frac{2}{3}$ transforme A en A' et B en B'

<u>Exercice n11</u>

1) Notons $B'(x';y')$. Puisque B' est l'image de B par *h*, on a $\overrightarrow{AB'}=-2\overrightarrow{AB}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}(2;1)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB'}$ s'exprimant en fonction de celles de B' par $\overrightarrow{AB'}(x'+1;y'-2)$, l'égalité $\overrightarrow{AB'}=-2\overrightarrow{AB}$ se traduit par le système $\begin{cases}x'+1=-4\\ y'-2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=-5\\ y'=0\end{cases}$. Ainsi $\boxed{\text{B'(-5 ;0)}}$

2) Notons $C(x;y)$. Puisque C' est l'image de C par *h*, on a $\overrightarrow{AC'}=-2\overrightarrow{AC}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ s'expriment en fonction de celles de C : $\overrightarrow{AC}(x+1;y-2)$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC'}$ sont $\overrightarrow{AC'}(4;-4)$

L'égalité $\overrightarrow{AC'}=-2\overrightarrow{AC}$ se traduit par le système $\begin{cases}-2(x+1)=4\\ -2(y-2)=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=4\end{cases}$. Ainsi $\boxed{\text{C(-3 ;4)}}$

<u>Exercice n°12</u>

1) L'image de la droite *D* par *h* est une droite parallèle à *D*, donc de coefficient directeur identique à celui de *D*. L'équation de *D*' est donc de la forme $y=\frac{1}{2}x+p$. Pour déterminer *p*, il faut utiliser les coordonnées d'un point de *D*', qui sera obtenue comme l'image par *h* d'un point de *D*.

Choisissons le point B(0 ;2) de *D*. Notons $B(x';y')$. Puisque B' est l'image de B par *h*, on a $\overrightarrow{AB'}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}(-4;4)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB'}$ s'exprimant en fonction de celles de B' par $\overrightarrow{AB'}(x'-4;y'+2)$, l'égalité $\overrightarrow{AB'}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ se traduit par le système $\begin{cases}x'-4=\frac{5}{3}\times(-4)\\ y'+2=\frac{5}{3}\times 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=-\frac{8}{3}\\ y'=\frac{14}{3}\end{cases}$.

Ainsi $B'\left(-\frac{8}{3};\frac{14}{3}\right)$. En utilisant les coordonnées de B' dans l'équation $y=\frac{1}{2}x+p$, on écrit $y_{B'}=\frac{1}{2}x_{B'}+p \Leftrightarrow p=\frac{14}{3}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{18}{3}=6$. L'équation de *D*' est donc $\boxed{y=\frac{1}{2}x+6}$

Série : Homothéties

2) L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+4x-6y=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=13$ est le cercle C de centreD(-2 ;3) et de rayon $\sqrt{13}$

L'image de C par h est donc le cercle de centre $D'=h(D)$ et de rayon $\frac{5}{3}\times\sqrt{13}$

Notons $D'(x';y')$. Puisque D' est l'image de D par h, on a $\overrightarrow{AD'}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont $\overrightarrow{AD}(-6;5)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AD'}$ s'exprimant en fonction de celles de D' par $\overrightarrow{AD'}(x'-4;y'+2)$, l'égalité $\overrightarrow{AD'}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$ se traduit par le système $\begin{cases} x'-4=\frac{5}{3}\times(-6) \\ y'+2=\frac{5}{3}\times 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-6 \\ y'=\frac{19}{3} \end{cases}$.

L'équation de C' est donc $\boxed{(x+6)^2+\left(y-\frac{19}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\times\sqrt{13}\right)^2=\frac{325}{9}}$

Exercice n°13

1) On cherche un couple $(x;y)$ tel que $\begin{cases} x=3x-4 \\ y=3y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$. Il existe un et un seul point invariant $\Omega(2;-1)$.

2) $\overrightarrow{\Omega M}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$, alors que $\overrightarrow{\Omega M'}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'+1 \end{pmatrix}$ soit, en remplaçant x' et y' par leur valeur: $\begin{pmatrix} 3x-4-2 \\ 3y+2+1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} 3x-6 \\ 3y+3 \end{pmatrix}$. On remarque alors que $\overrightarrow{\Omega M'}=3\overrightarrow{\Omega M}$.

3) La relation précédente, valable pour tout point M, prouve que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport 3.

Exercice n°14

1) Déterminons les éventuels points fixes de cette transformation, en résolvant l'équation :

$z'=z \Leftrightarrow z=2(z+3-4i)-3+4i$

$\Leftrightarrow z=2z+6-8i-3+4i$

$\Leftrightarrow z=-3+4i$

La transformation f admet un point fixe Ω, d'affixe $z_\Omega=-3+4i$.

En écrivant successivement $z'=2z+3+4i$ et $z_\Omega=2z_\Omega+3+4i$, puis en soustrayant membre à membre, on obtient : $z'-z_\Omega=2(z-z_\Omega)$.

$\boxed{\text{La transformation } f \text{ est donc l'homothétie de centre } \Omega\text{, d'affixe } z_\Omega=-3+4i\text{, et de rapport 2}}$

2) Par l'homothétie f de centre Ω et de rapport 2, l'image C' du cercle C de centre A(-2+i) et de rayon 1 est le cercle de centre f(A) et de rayon $2\times 1=2$.

On calcule :

$f(A)=2(-2+i)+3+4i=-4+2i+3+4i=-1+6i$

$\boxed{\text{L'image de } C \text{ est le cercle } C' \text{ de centre le point } f(A) \text{ d'affixe } -1+6i \text{ et de rayon 2.}}$