Fiche 2 : Les suites géométriques

1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout n de IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n - 2$$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Donner une écriture explicite de u_n.

2 Soit (u_n) une suite géométrique.

a) Montrer que pour tout n>0, on a : $u_{n-1} \cdot u_{n+1} = u_n^2$

b) Les nombres suivants sont-ils 3 termes consécutifs d'une suite géométrique :

i) 100, 360, et 1296

ii) 42, 294, et 2056

3 On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{6^n - 5^n}{6^n + 5^n}$

Calculer $S = \dfrac{2}{u_1 - 1} + \dfrac{2}{u_2 - 1} + \dots + \dfrac{2}{u_n - 1}$

4 Montrer que chacune des suites suivantes est géométrique et préciser sa raison.

a) $u_n = (-6)^{3n+1}$

b) $u_n = (-1)^n\, 3^{2n+1}$

c) $u_{2n} = -12$ et $u_{2n+1} = 12$

d) $u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$

Fiche 2 : Les suites géométriques

5 Existe-t-il une suite géométrique (u_n) telle que :

a) $u_3 = -17$ et $u_6 = -2125$

b) $u_4 = 9$ et $u_8 = 729$

c) $u_5 = -2$ et $u_9 = 81$

6 Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur IN par : $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $v_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$

On note : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

a) Déterminer la nature des suites (u_n) et (v_n).

b) Exprimer, en focntion de n, (S_n) et (T_n).

Fiche 2 : Les suites géométriques

1 a) Pour tout n de IN, on a : $v_n = u_n - 2$

Donc : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = (4u_n - 6) - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2) = 4v_n$

Donc : (v_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 5$.

b) De la question précédente, on déduit : $v_n = 5 \times 4^n$ pour tout n de IN.

Or : $v_n = u_n - 2$ donc : $u_n = v_n + 2 = 5 \times 4^n + 2$

Soit : $u_n = 5 \times 2^{2n} + 2$

2 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle.

a) Pour tout n>0, on a : $u_{n-1} = \dfrac{u_n}{q}$ et $u_{n+1} = q\,u_n$

Donc : $u_{n-1} \cdot u_{n+1} = \dfrac{u_n}{q} \cdot qu_n$ d'où : $u_{n-1} \times u_{n+1} = u_n^2$

b) i) On a : $100 \times 1296 = 129\,600$ et : $360^2 = 129\,600$

Donc ce sont bien trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

ii) On a: $42 \times 2056 = 86\,352$ et $294^2 = 86\,436$

Donc 42, 294, et 2056 ne sont pas trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Fiche 2 : Les suites géométriques

3 Pour tout k compris entre 1 et n, on a : $u_k = \dfrac{6^n - 5^n}{6^n + 5^n}$

$$\frac{2}{u_k - 1} = \frac{2}{\dfrac{6^k - 5^k}{6^k + 5^k} - 1} = \frac{2}{\dfrac{-2.5^k}{6^k + 5^k}} = -\frac{6^k + 5^k}{5^k} = -\frac{6^k}{5^k} - 1$$

D'où : $\dfrac{2}{u_k - 1} = -\left(\dfrac{6}{5}\right)^k - 1$

Donc : $S = -\left[\left(\dfrac{6}{5}\right)^1 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^3 + \dots + \left(\dfrac{6}{5}\right)^n\right] - (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$

On remarque une somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme

$\dfrac{6}{5}$ et de raison $\dfrac{6}{5}$

D'où : $S = -\dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{1 - \left(\dfrac{6}{5}\right)^n}{1 - \dfrac{6}{5}} - n = 6 \cdot \left[1 - \left(\dfrac{6}{5}\right)^n\right] - n = \dfrac{6^{n+1}}{5^n} - n - 6$

Fiche 2 : Les suites géométriques

4

a) On a : $u_n = (-6)^{3n+1}$

Donc : $u_{n+1} = (-6)^{3(n+1)+1} = (-6)^{3n+4} = (-6)^3 . (-6)^{3n+1}$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $(-6)^3 = -216$.

b) On a : $u_n = (-1)^n \times 3^{2n+1}$

Donc : $u_{n+1} = (-1)^{n+1} \times 3^{2(n+1)+1} = (-1)^{n+1} \times 3^{2n+3} = -(-1)^n . 3^2 . 3^{2n+1}$

$= -3^2 . u_n = -9 . u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison (-9) .

c) On a : $u_{2n} = -12$ et : $u_{2n+1} = 12$

Donc : $u_n = (-1)^{n+1} \times 12$. On en déduit : $u_{n+1} = (-1)^{n+2} \times 12 = -u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison (-1).

d) On a : $u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$

Donc : $u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}}{3^{n+2}} = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{4^n}{3^{n+1}} = \dfrac{4}{3} u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{4}{3}$.

Fiche 2 : Les suites géométriques

5 Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors on a : $u_{n+1} = q \cdot u_n$ pour tout n.

a) On a : $u_3 = -17$ et $u_6 = -2125$

Or : $u_6 = q^3 \times u_3$ d'où $q^3 = \dfrac{u_6}{u_3} = 125$

Donc : $q = 5$

Puis : $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = -\dfrac{17}{125}$

b) On a : $u_4 = 9$ et $u_8 = 729$

Or : $q^4 = \dfrac{u_8}{u_4} = 81$ donc : $q = 3$ ou $q = (-3)$

Et : $u_0 = \dfrac{u_4}{q^4}$

Ainsi : Si $q = 3$, on a : $u_0 = \dfrac{9}{3} = 3$

Si $q = (-3)$, on a : $u_0 = -\dfrac{9}{3} = -3$

Il existe donc deux suites géométriques répondant à la question :

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$

c) On a : $u_5 = -2$ et $u_9 = 81$

Or : $q^4 = \dfrac{u_9}{u_5} = -\dfrac{81}{3}$ impossible car 4 est pair et q^4 doit être positif.

Donc il n'existe donc pas de suite géométrique répondant à la question.

Fiche 2 : Les suites géométriques

6

a) On a : pour tout n de IN , $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Donc : $u_{n+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2}{5}u_n$

D'où (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1.$

De même : pour tout n de IN , $v_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$

Donc : $v_{n+1} = \left(\frac{3}{8}\right)^{n+1} = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^n = \frac{3}{8}v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{8}$ et de premier terme $u_0 = \left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1.$

b) On a : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$= \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

De même, on a : $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 1 + \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{8}\right)^n$

$$= \frac{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{8}{5}\left[1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$