Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $x^2 + 4x - 21 = 0$
2. $x^2 - 7x + 10 = 0$
3. $-x^2 + 6x - 10 = 0$
4. $3x^2 + 6x - 3 = 0$
5. $\dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{x}{x-2}$
6. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $\sqrt{4-x} = x - 2.$
2. $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$
3. $\sqrt{2x-6} = x - 3$

Exercice 3

Soit $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ un polynôme de degré trois.

1. Calculer $P(-3)$.
2. Déterminer un polynôme de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont trois constantes réelles) tel que l'on ait $P(x) = (x+3)\,Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer les racines de Q. En déduire sa factorisation.
4. Factoriser P, puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$ (on dressera un tableau de signe).

Exercice 4

Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 116x - 480$ un polynôme.

1. Calculer $P(-5)$.
2. Déterminer un polynôme Q tel que l'on ait $P(x) = (x+5)\,Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer les racines de Q.
4. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 1

1. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times (-21) = 100$.
   Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes
   $$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 - 10}{2} = -7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 + 10}{2} = 3$$
   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{-7; 3\}$

2. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 10 = 9$.
   Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes
   $$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$
   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{2; 5\}$.

3. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = -4$.
   Comme $\Delta < 0$, elle n'admet donc solution réelle.
   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \emptyset$

4. On a ici $3x^2 + 6x - 3 = 0$ équivaut à $x^2 + 2x - 1 = 0$.
   Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) = 8$.
   Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes
   $$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$
   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\right\}$.

5. L'expression $\frac{2x}{x-1}$ est définie lorsque $x - 1 \neq 0$ soit $x \neq 1$.
   L'expression $\frac{x}{x-2}$ est définie lorsque $x - 2 \neq 0$ soit $x \neq 2$.
   Ains l'équation est dé finie lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

   Pour un tel x $\quad \frac{2x}{x-1} = \frac{x}{x-2}$ équivaut à $2x(x-2) = x(x-1)$

   équivaut à $2x^2 - 4x = x^2 - x$

   équivaut à $x^2 - 3x = x(x-3) = 0$

   équivaut à $x = 0$ ou $x = 3$

   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{0; 3\}$.

6. On a $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x^2+x-6}$ équivaut à $3x+2 = x^2+x-6$

équivaut à $x^2-2x-8=0$

équivaut à $(x-1)^2-3^2=0$

équivaut à $(x+2)(x-4)=0$

équivaut à $x=-2$ ou $x=4$

Vérifions maintenant si ces nombres sont bien des solutions de l'équation.

Pour $x=-2$, on a $3x+2 = 3\times(-2)+2 = -4 < 0$ donc $\sqrt{3x+2}$ n'est pas définie.
Pour $x=4$, on a $3x+2 = 3\times 4+2 = 14$ et $x^2+x-6 = 4^2+4-6 = 14$: cela convient.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{4\}$.

Exercice 2

1. L'expression $\sqrt{4-x}$ est définie lorsque $4-x \geqslant 0$ soit $x \leqslant 4$; de plus, l'expression $x-2$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation proposée est définie lorsque $x \leqslant 4$.

Pour tout $x \leqslant 4$, $\sqrt{4-x} = x-2$ équivaut à $\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 4-x = (x-2)^2 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ 4-x = x^2-4x+4 \end{cases}$

Or $4-x = x^2-4x+4$ équivaut à $x(x-3)=0$ équivaut à $x=0$ ou $x=3$

La seule solution de cette équation appartenant à l'intervalle $[2\,;4]$ est 3, donc

L'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{4-x} = x-2$ est $S = \{3\}$

2. L'expression $\sqrt{x+12}$ est définie lorsque $x+12 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -12$.
L'expression $\sqrt{x^2+2x-8}$ est définie lorsque $x^2+2x-8 \geqslant 0$, donc à l'extérieur des racines de ce trinôme du second degré. Son discriminant est

$$\Delta = 2^2 - 4\times(-8) = 4+32 = 36$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{-2-6}{2} = -4$$

et $$x_2 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Ainsi, l'expression $\sqrt{x^2+2x-8}$ est définie lorsque $x \in \left]-\infty\,;-4\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$.

L'équation proposée est donc définie lorsque

$$x \geqslant -12 \text{ et } x \in \left]-\infty\,;-4\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$$

soit lorsque
$$x \in \left[-12\,;-4\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$$

Pour tout $x \in \left[-12\,;-4\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$, on a alors

$$\begin{aligned}\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8} \quad &\text{équivaut à} \quad x+12 = x^2+2x-8\\ &\text{équivaut à} \quad x^2+x-20=0\end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est

$$\Delta = 1^2 - 4\times(-20) = 81$$

Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{81}}{2\times 1} = \frac{-1-9}{2} = -5$$

et
$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{81}}{2\times 1} = \frac{-1+9}{2} = 4$$

Ces deux nombres appartiennent bien à l'ensemble $\left[-12\,;-4\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$, donc

L'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$ est $\mathrm{S} = \{-5;4\}$

3. La quantité $\sqrt{2x-6}$ est définie lorsque $x \geqslant 3$; de plus, la quantité $x-3$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation proposée est définie lorsque $x \geqslant 3$.

   Dans ce cas, les deux membres de l'équation sont positifs donc elle équivaut à l'égalité de leurs carrés.

   Pour tout $x \geqslant 3$,
$$\begin{aligned}\sqrt{2x-6} = x-3 \quad &\text{équivaut à} \quad 2(x-3) = (x-3)^2\\ &\text{équivaut à} \quad (x-3)(x-3-2)=0\\ &\text{équivaut à} \quad (x-3)(x-5)=0\\ &\text{équivaut à} \quad x=3 \quad \text{ou} \quad x=5\end{aligned}$$

   Ces deux nombres sont bien supérieurs ou égaux à 3, donc

   L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathrm{S} = \{3, 5\}$

Exercice3

1. $P(-3) = (-3)^3 + 5\times(-3)^2 - 2\times(-3) - 24 = -27 + 5\times 9 + 6 - 24 = -27 + 45 + 6 - 24 = 0.$

2. Comme $P(-3) = 0$, on sait que $P(x)$ se factorise par $(x+3)$.
   Cherchons alors $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $P(x) = (x+3)\,Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   On a
   $$\begin{aligned}(x+3)Q(x) &= (x+3)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c\\ &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3b+c)x + 3c\end{aligned}$$

   On sait que deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les mêmes coefficients. De ce fait, la relation

   $$\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = (x+3)\,Q(x)$$

   équivaut à $\begin{cases} a = 1\\ 3a+b = 5\\ 3b+c = -2\\ 3c = -24\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a=1\\ b = 5-3a\\ c = -2-3b\end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1\\ b=2\\ c=-8\end{cases}$

   Donc $Q(x) = x^2 + 2x - 8$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3. Le polynôme du second degré Q a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times(-8) = 36$.
   Comme $\Delta > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles distinctes, à savoir

   $$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2} = \frac{-2-6}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

   Ainsi l'ensemble des zéros de Q est $\{-4;2\}$.

   On en déduit que $Q(x) = (x+4)(x-2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

4. Comme $P(x) = (x+3)\,Q(x)$ d'après la question 2, il s'ensuit que

   $$P(x) = (x+3)(x+4)(x-2) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}$$

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
$(x+4)$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x+3)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-2)$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4

1. $P(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 - 2(-3) - 24 = -27 + 45 - 6 - 24$

   Ains $P(-5) = 0$.

2. Comme $P(-5) = 0$, on sait que le polynôme $P(x)$ se factorise par $(x+5)$: de ce fait,

   Il existe un polynôme Q du second degré tel que $P(x) = (x+5)\,Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Posons $Q(x) = a x^2 + bx + c$, Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $P(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + c) = a x^3 + (b + 5a) x^2 + (c + 5b) x + 5c$

   $$\text{équivaut à } \begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = 5 \\ 5b + c = -2 \\ 5c = -24 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -96 \end{cases}$$

   Ainsi, $Q(x) = x^2 - 4x - 96$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Le discriminant du polynôme Q du second degré est :

   $$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-96) = 4 \times 4 + 4 \times 96 = 400$$

   Comme $\Delta > 0$, le polynôme Q admet deux zéros distincts :

   $$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{400}}{2 \times 1} = \frac{4 - 20}{2} = -8$$

   et $$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{400}}{2 \times 1} = \frac{4 + 20}{2} = 12$$

   Ainsi les zéros de Q sont -8 et 12

4. D'après les résultats des questions 2 et 3, on a

   $P(x) = 0$ équivaut à $(x+5)\,Q(x) = 0$
   équivaut à $x + 5 = 0$ ou $Q(x) = 0$
   équivaut à $x = -5$ ou $x = -8$ ou $x = 12$

   L'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ est $S = \{-8; -5; 12\}$.