Arithmétique

Exercice1

Soit n un entier naturel, on pose : $A = 3n + 5$ et $B = 5n + 2$.

1. Montrer que les diviseurs de A et B sont les diviseurs de 19.
2. En déduire les valeurs possibles des diviseurs communs de A et B.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

1. On donne $A = \frac{n(n+1)}{2}$, $B = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ et $C = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Montrer que A, B et C sont des entiers naturels.

2. En déduire que $D = n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.

Exercice 3

a étant un chiffre, soit x = 361616494 et y = 3a1a1a4a1 deux entiers naturels.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de x par 3 puis par 11.
2. Déterminer le chiffre a pour que le reste de la division euclidienne de y par 11 est égal à 8.
3. On prend a = 6.
   a) Montrer que si un entier d divise x et y alors d divise 33.
   b) En déduire que x et y sont premiers entre eux.

Exercice 4

1. Trouver le reste de la division euclidienne de A = 142358 et de B = 823152 par 11.
2. Soit C = 234657412a36 où a est le chiffre des centaines de C.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le chiffre a :

a) Le reste de la division euclidienne de C par 3 est égal à 2.
b) C est divisible par 11.
c) Le reste de la division euclidienne de C par 8 est égal à 4.

Arithmétique

Exercice 1 :

1. Soit d un diviseur commun de A et B :
   Il existe deux entiers A' et B' tels que A = d.A' et B = d.B' et il en résulte que
   $$5A-3B=5(3n+5)-3(5n+2)=25-6=19$$
   et $$5A-3B=5(d\times A')-3(d\times B')=d(5A'-3B')$$
   d'où $d(5A'-3B')=19$
   Ainsi d divise 19.
   Par suite, les diviseurs de A et B sont les diviseurs de 19.
2. Comme 19 est un nombre premier alors les diviseurs de 19 sont : 1 et 19.
   Ainsi, les diviseurs communs de A et B sont 1 et 19.

Exercice 2 :

1. On a : $A=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
   L'entier naturel n est soit pair , soit impair.
   - ✓ Si n est pair alors il existe un entier naturel p tel que $n=2p$; il vient :
     $$A=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2p(2p+1)}{2}=p(2p+1)$$ donc A est un entier naturel.
   - ✓ Si n est impair alors il existe un entier naturel p tel que $n=2p+1$; il vient :
     $$A=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2p+1)(2p+2)}{2}=(2p+1)(p+1)$$ donc A est un entier naturel.

Remarquons que le produit de deux entiers consécutifs est pair.

Par conséquent, A est un entier naturel.

On a : $B=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}=\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{(n+2)}{3}=A\times\dfrac{(n+2)}{3}$.

Comme $n(n+1)$ est divisible par 2 alors $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 2.

Il reste à montrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

L'entier naturel n est soit divisible par 3 ou non divisible par 3.

- ✓ Si n est divisible par 3 alors il existe un entier p tel que $n=3p$; il vient :
  $$n(n+1)(n+2)=3p(3p+1)(3p+2).$$
- ✓ Si n n'est pas divisible par 3 alors il existe un entier p tel que $n=3p+1$ ou $n=3p+2$; il vient :
  $$n(n+1)(n+2)=(3p+1)(3p+2)(3p+3)=3(3p+1)(3p+2)(p+1)$$
  Ou $$n(n+1)(n+2)=(3p+2)(3p+3)(3p+4)=3(3p+2)(p+1)(3p+4).$$

Ainsi , $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 2 et par 3 donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Par suite, il existe un entier naturel q tel que $n(n+1)(n+2)=6q$ d'où $B=q$.

Par conséquent : B est entier naturel.

Remarquons que le produit de trois entiers est multiple de 6.

On a : $C=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n(n+1)\left[(n+2)+(n-1)\right]}{6}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}+\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

$n(n+1)(n+2)$ et $(n-1)n(n+1)$ sont divisibles par 6 sont donc $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6 d'où C est un entier naturel.

2. $D=n(n+1)(n+2)(n+3)=\left[n(n+1)(n+2)\right](n+3)$ donc D est divisible par 3.

D'autre part : n, n+1, n+2 et n + 3 sont quatre entiers consécutifs donc l'un nécessairement est divisible par 4.

- ✓ Si n est divisible par 4 alors il existe un entier p tel que n = 4p :
  $D=n(n+1)(n+2)(n+3)=4p(4p+1)(4p+2)(4p+3)=8p(4p+1)(2p+1)(p+3)$
  donc est divisible par 8.
- ✓ Si n = 4p +1 où p est un entier, alors :
  $D=(4p+1)(4p+2)(4p+3)(4p+4)=8(4p+1)(2p+1)(4p+3)(p+1)$
  Donc D est divisible par 8.
- ✓ Si n = 4p + 2 où p est un entier, alors :
  $D=(4p+2)(4p+3)(4p+4)(4p+5)=8(4p+2)(4p+3)(p+1)(4p+5)$
  Donc d est divisible par 8.
- ✓ Si n = 4p + 3 ou p est un entier, alors :
  $D=(4p+3)(4p+4)(4p+5)(4p+6)=8(4p+3)(p+1)(4p+5)(2p+3)$
  Donc d est divisible par 8.

Ainsi, on vient de démontrer que D est divisible par 8.

Par suite, D est divisible par 3 et 8 et donc D divisible par 24.

Exercice 3

1. Pour x = 361616494,
on a : 4+9+4+6+1+6+1+6+3 = 40 et $40=13\times3+1$.
Donc le reste de la division euclidienne de x par 3 est **1**.
D'autre part : 4 – 9 + 4 - 6 + 1 – 6 + 1 – 6 + 3 = -14 = $(-14+22)+22=8+22$

Arithmétique

Donc le reste de la division euclidienne de x par 11 est **8**.

2. Pour y = 3a1a1a4a1,

On a : 1 – a + 4 – a + 1 – a + 1 – a + 3 = 10 – 4a.

Pour que le reste de la division euclidienne de y par 11 soit 8, il suffit que le reste de la division euclidienne de 10 – 4a par 11 soit 8. D'où il existe un entier q tel que :

$10-4a=11\times q+8$ ou encore $(10-4a)-8=2-4a=11\times q$.

a	0	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9
2 – 4a	2	-2	-6	-10	-14	-18	**-22**	-26	-30	-34

Ainsi : pour a = 6, le reste de la division euclidienne de y = 3a1a1a4a1 = 361616461 par 11 est 8.

3. **On prend a = 6** .
   a) Si un entier d divise x et divise y alors d divise x – y =361616494 - 361616461 = 33.
   b) Les diviseurs de 33 sont : 1, 3, 11 et 33.
   D'autre part : 1 + 6 + 4+ 6+ 1+6+ 1+6+ 3 =34 et 34 = 11×3+1 donc y n'est pas divisible par 3.
   Par suite x et y ne sont divisibles ni par 3 , ni par 11 donc le seule diviseur commun de x et de y est 1.
   Il en résulte que: x et y sont premiers entre eux.

Exercice 4 :

1. Pour l'entier A = 142358 , on a : 8 – 5 + 3 – 2 + 4 – 1 = **7** donc le reste de la division euclidienne de A par 11 est **7** .
   Pour l'entier B = 823152, on a : 2 – 5 + 1 - 3 + 2 – 8 = **-**11 donc le reste de la division euclidienne de B par 11 est **0**.
2. Soit C = 234657412a36 où a est le chiffre des centaines de C.
   a) 6 + 3 + a + 2 + 1 + 4 + 7+ 5+ 6 + 4 + 3+ 2 = a + 43 = (a + 1) + 42
   Le reste de la division euclidienne de C par 3 est égal à 2 équivaut le reste **r** de la division euclidienne de (a + 1) dans la division euclidienne par 3 est égal à 2.

a	0	1	**2**	3	4	**5**	6	7	**8**	9
a+1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	0	1	**2**	0	1	**2**	0	1	**2**	0

   Ainsi , a = 2 ou a = 5 ou a = 8.

   b) C est divisible par 11 équivaut à 6 - 3 + a - 2 + 1 - 4 + 7- 5+ 6 - 4 + 3- 2 = a + 3 est divisible par 11.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9
a+3	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12

   D'où a = 8.

   c) Le reste de la division euclidienne de C par 8 est égal à 7 équivaut à le reste de la division euclidienne de a36 par 8 est égal à 4.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a36	36	136	236	336	436	536	636	736	836	936
r	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0

   Ainsi : a appartient à l'ensemble $\{0,2,4,6,8\}$.