Rotation 2

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) tel que C est l'image de B par la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit M un point du cercle ($\mathscr{C}$) situé sur l'arc $\left[AB\right]$ ne contenant pas le point C.

1. Montrer que $AMB = \frac{2\pi}{3}$.
2. a) Placer le point I = r(M) puis montrer que $AIC = \frac{2\pi}{3}$.

   b) Montrer que I appartient au segment [CM].

   c) Montrer que MA + MB = MC.

Exercice 2 :

A et B sont deux points distincts. On appelle C l'image de B par la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de diamètre [AB].

1. Déterminer et tracer l'image ($\mathscr{C}$') du cercle ($\mathscr{C}$) par r.
2. Les cercles ($\mathscr{C}$') et ($\mathscr{C}$) se recoupent au point D.
   a) Montrer que D est le milieu du segment [BC].
   b) Déterminer ABC.
3. Soit M un point du cercle ($\mathscr{C}$) distinct de D . La droite (DM) recoupe ($\mathscr{C}$') au point M'.
   Montrer que $M' = r(M)$.

Exercice 3 :

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O, A et B deux points de ($\mathscr{C}$) tels que B est l'image de A par la rotation indirecte r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit M un point variable de ($\mathscr{C}$) distinct de B et N le point tel que M = r(N). Soit P le symétrique de M par rapport à la droite (AN).

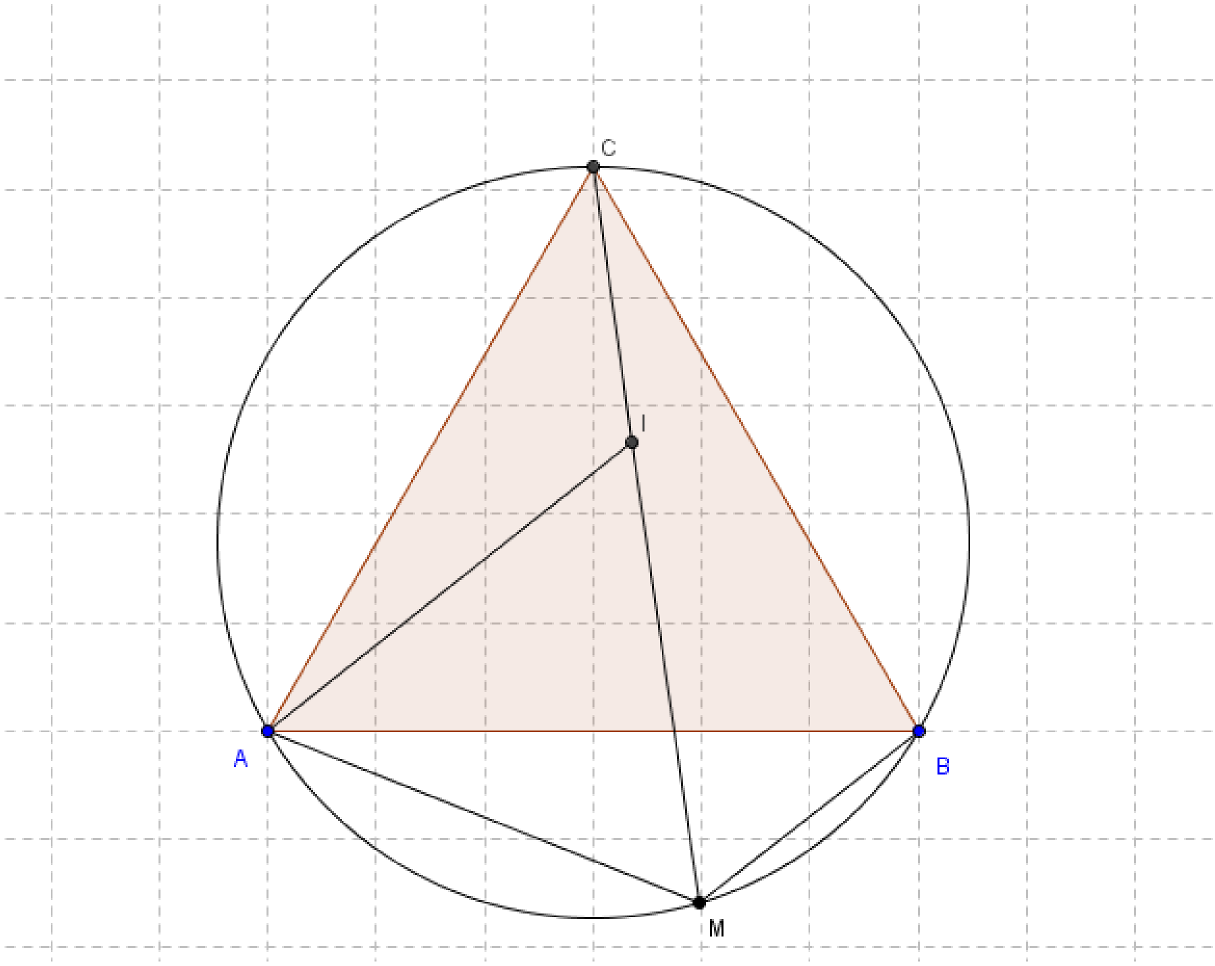
1. Déterminer MAP.
2. Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit ($\mathscr{C}$) privé de B.

copyright © www.mathsecondaire.net

Rotation 2

Solution

Exercice 1 :



1. M et C appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$) et non situés sur le même arc $\left[AB\right]$, donc

   $\text{AMB} = \pi - \text{ACB} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

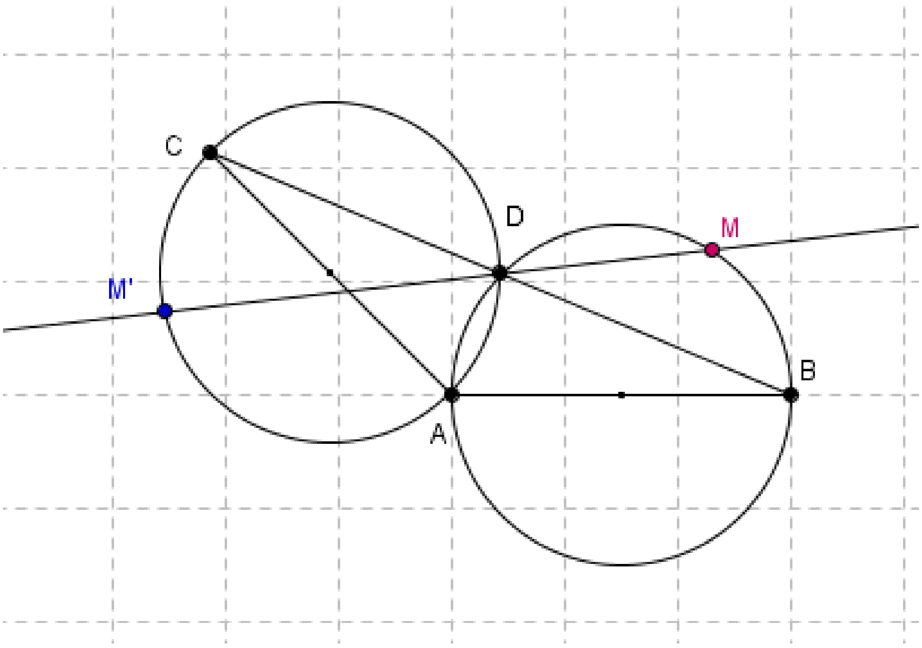
2. a) On a : r(A) = A, r(M) = I et r(B) = C donc $\text{AIC} = \text{AMB} = \dfrac{2\pi}{3}$. (La rotation r conserve les angles).

   b) r(M) = I équivaut à AM= AI et $\text{MAI} = \dfrac{\pi}{3}$ (direct) donc le triangle AMI est équilatéral. Il en résulte : $\text{CIM} = \text{CIA} + \text{AIM} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$ donc $\text{I} \in \left[\text{MC}\right]$.

   c) On sait que : AMI est un triangle équilatéral donc MA = MI .
   D'autre part : r(M) = I et r(B) = C donc MB = IC.
   Par suite : MA + MB = MI + IC .
   Or $\text{I} \in \left[\text{MC}\right]$ équivaut à MI + IC = MC.
   On conclue : MA + MB = MC.

Rotation 2

Exercice 2 :



1. ($\mathscr{C}$) est le cercle de diamètre [AB] donc ($\mathscr{C}$') = r ($\mathscr{C}$) est le cercle de diamètre r([AB]) = [AC].
2. a) Les cercles ($\mathscr{C}$') et ($\mathscr{C}$) se recoupent en D donc les triangles ABD et ACD sont rectangles en D. Donc $(AD)\perp(BD)$ et $(AD)\perp(CD)$ d'où $(BD)//(CD)$ d'où B, C et D sont alignés. Ainsi, la droite (AD) est perpendiculaire à la droite (BC).

Or r(A) = C donc AB = AC.

Il en suit: (AD) est la médiatrice de [BC] . Par conséquent, D est le milieu de [BC].

b) Le triangle ABC est isocèle en A donc $ABD+ACD=\pi-BAC=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$; d'où

$$ABD=ACD=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

3. Soit M un point du cercle ($\mathscr{C}$) situé sur l'arc [AD] et distinct des points A et D . La droite (DM) recoupe ($\mathscr{C}$') au point M'.

On a : $AMD=ABD=\frac{\pi}{8}$ et $AM'D=ACD=ACB=\frac{\pi}{8}$.

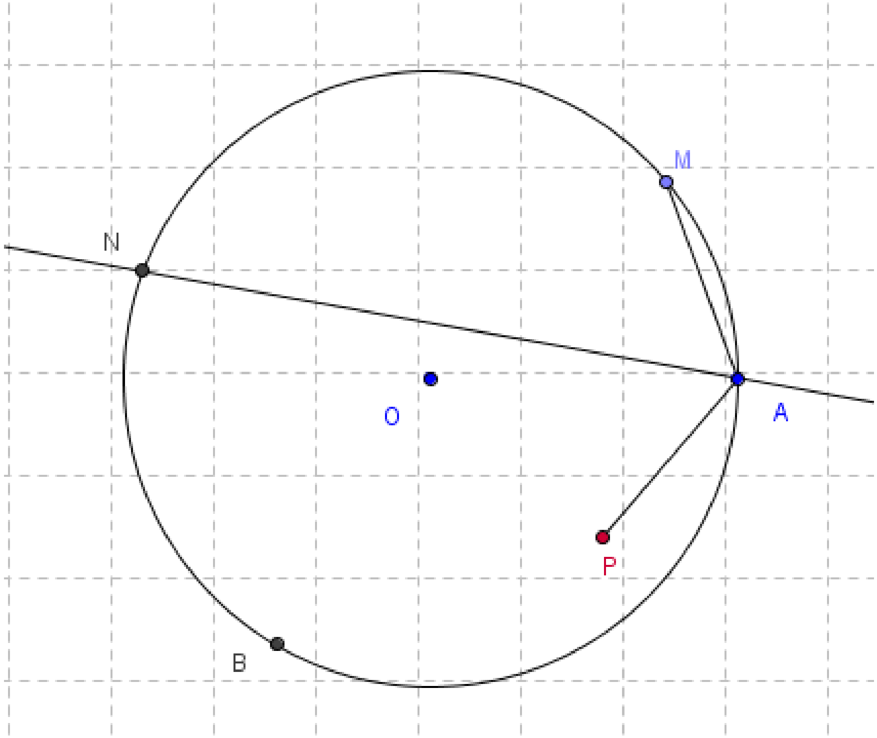
Par conséquent : $AMD=AM'D=\frac{\pi}{8}$.

Il en résulte : le triangle AMM' est isocèle en A. Et par suite : $MAM'=\pi-2.\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$

Ainsi : AM = AM' et $MAM'=\frac{3\pi}{4}$ donc $M'=r(M)$.

Rotation 2

Exercice 3 :



1. $MAN=\frac{1}{2}MON=\frac{1}{2}.\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$. Comme P est le symétrique de M par rapport à la droite (AN) alors $PAN=MAN=\frac{\pi}{3}$. D'où $MAP=MAN+NAP=\frac{2\pi}{3}$.

2. $P=S_{(AN)}(M)$ donc AP = AM ; et comme $MAP=\frac{2\pi}{3}$ alors la rotation directe r' de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme M en P.

   Lorsque M décrit ($\mathscr{C}$) privé de B, le point P = r'(M) décrit le cercle ($\mathscr{C}$') image de ($\mathscr{C}$) par r' , de centre O' = r'(O) et de rayon OA, privé de r'(B) = B' c'est-à-dire le point tel que AB = AB' et $BAB'=\frac{2\pi}{3}$ (direct).