



Suites arithmétiques

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie dans $\mathbb{N}$ par $U_n = 2n + 1$.

1. Calculer U_0, U_1, U_2 et U_{15} .
2. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3. Déterminer trois termes consécutifs a, b et c de la suite (U_n) vérifiant : $a + b + c = 69$.

Exercice 2

Soit la suite (V_n) définie dans $\mathbb{N}$ par $V_n = n^2 - 1$.

1. Calculer V_0, V_1 et V_2 .
2. La suite (V_n) est-elle arithmétique ?

Exercice 3

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_0 = 2$ et $U_1 = -1$.

1. Montrer que la raison de cette suite est -3.
2. Calculer U_{20} .
3. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{20}$.

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + 3$.

1. Calculer U_2 .
2. Quelle est la nature de cette suite ?
3. Exprimer U_n en fonction de n .
4. Soit n un entier naturel non nul, on pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
 - a) Calculer S_n en fonction de n .
 - b) Déterminer n pour que $S_n = 715$.

Exercice 5

On donne 27, x , y et 63 quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique (U_n) .

On pose $S = 27 + x + y + 63$.

1. Montrer que $27 + x + y + 63 = 180$.
2. Calculer la raison r et les termes x et y de la suite (U_n) .



Suites arithmétiques

Exercice 1 :

- $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$, $U_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$, $U_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$ et $U_{15} = 2 \times 15 + 1 = 31$.
- Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2$.
Donc (U_n) est une suite arithmétique de raison 2.
- a , b et c sont trois termes consécutifs de la suite (U_n) donc il existe un entier n tels que :
 $a = u_n = 2n + 1$, $b = u_{n+1} = 2n + 3$ et $c = u_{n+2} = 2n + 5$.
D'où $a + b + c = (2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) = 6n + 9$.
Ainsi, pour que : $a + b + c = 69$ il faut et il suffit que $6n + 9 = 69$ d'où $n = 10$.

Exercice 2 :

- $V_0 = 0^2 - 1 = -1$, $V_1 = 1^2 - 1 = 0$ et $V_2 = 2^2 - 1 = 3$.
- On a : $V_1 - V_0 = 0 - (-1) = 1$ et $V_2 - V_1 = 3 - 0 = 3$.
Comme $V_2 - V_1 \neq V_1 - V_0$ alors (V_n) n'est pas une suite arithmétique.

Exercice 3 :

- (U_n) une suite arithmétique telle que $U_0 = 2$ et $U_1 = -1$ donc sa raison est
 $U_1 - U_0 = -1 - 2 = -3$
- (U_n) est donc la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $U_0 = 2$, il en résulte que
pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = U_0 + (-3) \times n = 2 - 3n$.
Ainsi : $U_{20} = 2 - 3 \times 20 = -58$.
- $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{20} = (20 - 0 + 1) \frac{(U_0 + U_{20})}{2} = 21 \times \frac{(-56)}{2} = -588$.

Exercice 4 :

- $U_2 = U_1 + 3 = (U_0 + 3) + 3 = U_0 + 6 = 7$.
- Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = 3$ donc (U_n) est une suite arithmétique de raison 3.
- On en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = U_0 + 3n = 1 + 3n$.
- a) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1) \frac{(U_0 + U_n)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.
b) $S_n = 715$ équivaut à $\frac{(n+1)(3n+2)}{2} = 715$ équivaut à $(n+1)(3n+2) = 1430$.



Suites arithmétiques

équivalent à $3n^2 + 5n - 1428 = 0$.

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $3x^2 + 5x - 1428 = 0$.

Pour cela, calculons le discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-1428) = 17161 = 131^2$.

Donc l'équation (E) admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-5+131}{6} = 21 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5-131}{6} = -\frac{136}{6} = -\frac{68}{3} \notin \mathbb{N}.$$

Par suite, l'équation $3n^2 + 5n - 1428 = 0$ admet dans $\mathbb{N}$ la solution $n = 21$.

Exercice 5 :

1. $S = 27 + x + y + 63$ est la somme de **quatre** termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Le premier terme de S est **27** et le dernier terme de S est **63**.

$$\text{Donc } S = 4 \times \frac{(27+63)}{2} = 4 \times \frac{90}{2} = 4 \times 45 = 180.$$

2. Soit r la raison de la suite (U_n) , on a donc $63 = 27 + 4r$

$$S \text{ s'écrit encore sous la forme } S = 4 \times \frac{(27+63)}{2} = 4 \times \frac{(54+4r)}{2} = 2(54+4r) = 108 + 8r.$$

Il en résulte que $108 + 8r = 180$ d'où $8r = 72$ ou encore **$r = 9$** .

On sait que : $x = 27 + r = \mathbf{36}$ et $y = x + r = 36 + 9 = \mathbf{45}$.