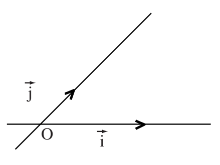
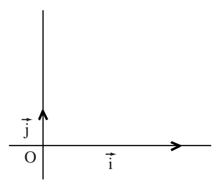
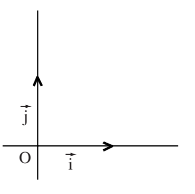
Géométrie analytique

1. Repère du plan

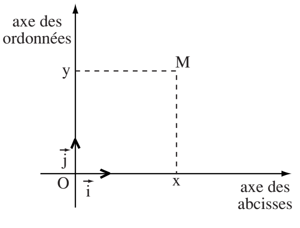
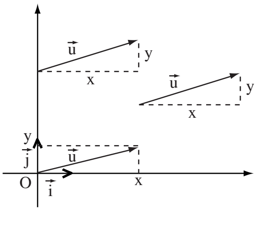
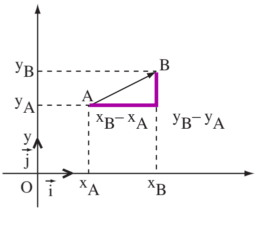
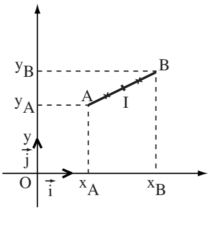
Déterminer un repère c'est :

- choisir un point O, qui sera appelé origine du repère
- choisir deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est alors appelé base du repère $(0,\vec{i},\vec{j})$

Trois cas se présentent :

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormé
		
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux	$\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux ET $\Vert\vec{i}\Vert = \Vert\vec{j}\Vert = 1$

2. Coordonnées de points et de vecteurs

Coordonnées d'un point dans un repère	Coordonnées d'un vecteur dans une base	Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$	Coordonnées du milieu d'un segment
 M a pour coordonnées (x ; y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ x est l'abscisse de M y est son ordonnée	 $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou (x ; y)) dans la base $(\vec{i},\vec{j})$: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.	 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées dans la base $(\vec{i},\vec{j})$: $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$	 $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ Le point I a pour coordonnées dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

Géométrie analytique

Propriétés des coordonnées de vecteurs

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

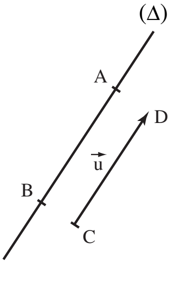
- **Égalité de deux vecteurs : $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.**
- **Somme de deux vecteurs : $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x + x'\\y + y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.**
- **Produit d'un vecteur par un nombre réel k : $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.**
- **Colinéarité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.**

3. Vecteurs directeurs d'une droite - Parallélisme de deux droites

3.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

Dire que $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) signifie que $\vec{u}$ est non nul et que les droites (Δ) et (CD) sont parallèles.



Remarque

- un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- une droite a une infinité de vecteurs directeurs.
- une droite d'équation $y = mx + p$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

Exemples

- La droite (AB) a aussi pour vecteur directeur $\overrightarrow{BA}$, $2\overrightarrow{AB}$, $-5\overrightarrow{AB}$... $k\overrightarrow{AB}$ $(k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$.
- Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (AB) dont une équation est $y = \frac{1}{2}x + 1$

a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ mais aussi les vecteurs $2\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $-3\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$...

Géométrie analytique

Exemples

▸La droite (AB) a aussi pour vecteur directeur $\overrightarrow{BA}$, $2\overrightarrow{AB}$, $-5\overrightarrow{AB}$.. $k\overrightarrow{AB}$ ($k \in \mathbb{R}, k \neq 0$).

▸ Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (AB) dont une équation est $y = \frac{1}{2}x + 1$

a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ mais aussi les vecteurs $2\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $-3\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$...

3.2. Utilisation : parallélisme de deux droites

Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

D'où la droite (Δ) d'équation y = mx + p et la droite (Δ') d'équation y = m'x + p' sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\Delta \ // \ \Delta' \iff m = m'.$$

Retenons:

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

4. Distance

Dans cette partie, le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est nécessairement **orthonormé,** la base $(\vec{i},\vec{j})$ est donc **orthonormée.**

Norme d'un vecteur

Soient $\vec{u}$ de coordonnées (x,y) et $\vec{v}$ de coordonnées (x',y') dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

la norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Distance de deux points

Pour A et B deux points de coordonnées $(x_A \; ; y_A)$ et $(x_B \; ; y_B)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$