Équations

1. Connaissances indispensables

- Savoir résoudre une équation simple du type $ax = b$ ou $a + x = b$.
- Savoir résoudre une équation du type $A \times B = 0$ où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.
- Savoir factoriser.
- On peut ajouter (ou retrancher) le même nombre aux deux membres d'une équation; on obtient une équation ayant les mêmes solutions.
- On peut multiplier (ou diviser) par un même nombre non nul les deux membres d'une équation ; on obtient une équation ayant les mêmes solutions.

2. Résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Méthode

On regroupe les termes contenant l'inconnue x dans l'un des membres de l'équation. On se ramène ainsi à une équation de la forme : $ax = b$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $ax = b$		
Conditions	Solution	Ensemble solution
$a \neq 0$	une seule solution $x = \frac{b}{a}$	$S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$
$a = 0$ et $b \neq 0$	aucune solution	$S = \varnothing$
$a = 0$ et $b = 0$	tous les réels sont solutions	$S = \mathbb{R}$

Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$:

- $\frac{3x}{4} + 2 = \frac{x}{3} - 1$

on réduit au même dénominateur, on obtient : $\frac{9x}{12} + \frac{24}{12} = \frac{4x}{12} - \frac{12}{12}$

on multiplie les deux membres par 12, on obteint : $9x + 24 = 4x - 12$

d'où : $9x - 4x = -12 - 24$ équivaut à $5x = -36$ équivaut à $x = -\frac{36}{5}$

Donc $S = \left\{-\frac{36}{5}\right\}$

Équations

- $5(x-1)+2x = 7(x+2)$

  on développe chaque membre, on obtient : $5x-5+2x = 7x+14$

  d'où : $7x-7x = 5+14$ équivaut à $0x = 19$

  Donc $S = \varnothing$

- $7(x-5)+15 = 4(x-5)+3x$

  on développe chaque membre, on obtient : $7x-35+15 = 4x-20+3x$

  d'où : $7x-7x = 20-20$ équivaut à $0x = 0$

  Donc $S = \mathbb{R}$

3. Résoudre une équation à une inconnue, de degré supérieur à un.

Méthode

Si on exclut les cas particuliers (exemple 3) et les « fausses équations du second degré » (exemple 4), la méthode à employer est la suivante :

– regrouper tous les termes dans le premier membre de l'équation de manière à avoir 0 dans le second membre,

– factoriser le premier membre,

– appliquer le théorème : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$:

- $x^3 = -4x$

  d'où : $x^3+4x = 0$ équivaut à $x(x^2+4) = 0$ équivaut à $x = 0$

  Donc $S = \{0\}$

Équations

▶ $2x(x-2) = 4-x^2$ équivaut à $2x(x-2)+(x^2-4) = 0$

équivaut à $2x(x-2)+(x-2)(x+2) = 0$

équivaut à $(x-2)[2x+(x+2)] = 0$

équivaut à $(x-2)(3x+2) = 0$ équivaut à $x = 2$ ou $x = -\frac{2}{3}$

Donc $S = \left\{-\frac{2}{3};2\right\}$

▶ $x(2x+3)+5(x-1) = -2(3-4x)$ équivaut à $x(2x+3)+5(x-1)+2(3-4x) = 0$

L'expression n'ademt aucun facteur commun, on développe, puis on réduit le premier membre:

$2x^2+3x+5x-5+6-8x = 0$ équivaut à $2x^2+1 = 0$

Donc $S = \varnothing$

▶ $(x-1)(3x+5) = 3x^2+4$ équivaut à $(x-1)(3x+5)-3x^2-4 = 0$

On développe et on réduit le premier membre, on obtient : $3x^2+5x-3x-5-3x^2-4 = 0$

d'où : $2x-9 = 0$ équivaut à $2x = 9$ équivaut à $x = \frac{9}{2}$

Donc $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$

Équations

4. Résoudre une équation comportant une inconnue au dénominateur

Méthode

- Déterminer les contraintes de l'équation.
- Ramener l'équation à la forme $\frac{N}{D} = 0$.
- Résoudre l'équation $N = 0$.
- Vérifier que les valeurs trouvées conviennent.

Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$:

- $\frac{2x-1}{x-3} = 3$.

L'expression $\frac{2x-1}{x-3}$ est définie pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur.

Or $x-3 = 0$ pour $x = 3$. L'équation est donc définie pour $x \neq 3$.

Pour tout réel x différent de 3, $\frac{2x-1}{x-3} - 3 = 0$ équivaut à $\frac{2x-1-3(x-3)}{x-3} = 0$

équivaut à $\frac{2x-1-3x+9}{x-3} = 0$ équivaut à $\frac{-x+8}{x-3} = 0$

équivaut à $-x+8 = 0$ équivaut à $x = 8$

Comme $8 \neq 3$, alors $S = \{8\}$

- $\frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} - x$.

Cette équation est définie pour $x \neq -1$. Pour tout réel x différent de –1,

$\frac{1}{x+1} - \frac{x^2}{x+1} + x = 0$ équivaut à $\frac{1}{x+1} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{x(x+1)}{x+1} = 0$ équivaut à $\frac{1-x^2+x(x+1)}{x+1} = 0$

équivaut à $1-x^2+x(x+1) = 0$ équivaut à $1-x^2+x^2+x = 0$

équivaut à $1+x = 0$ équivaut à $x = -1$

Donc $S = \varnothing$