Lycée IBN KHALDOUN - RADES

❖❖❖

DEVOIR DE SYNTHESE N° 3

❖❖❖

Mr ABIDI Farid

CLASSE : $2^{ème}$ *Sciences 2*

EPREUVE ***MATHEMATIQUES***

Durée **: 2h**

Date : 05-03-2010

Exercice 1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux six propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. Après avoir corrigé les copies d'un devoir de contrôle de ses élèves, un professeur de mathématiques a remarqué que la moyenne général des élèves était 8,47 .
   a) Il décide d'ajouter 1,5 à chaque note de contrôle, alors la moyenne de classe devient : 9,97.
   b) Il décide d'augmenter chaque note de 10% , alors la moyenne de classe devient : 9,32.
2. Soit ABC est un triangle rectangle en A et I le milieu du segment [BC] .
   a) Alors la perpendiculaire au plan (ABC) en I est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.
   b) Le plan contenant la droite (AI) et perpendiculaire au plan (ABC) est le médiateur du segment [AB].
3. Soit (H) l'hyperbole d'équation $y = 2 - \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.
   a) Le centre de (H) est le point I(2, 0).
   b) (H) ne coupe pas la droite (D) : y = x.

Exercice 2 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

On suppose que la courbe représentative (C_g) de g est une hyperbole.

a) Donner le centre I et les asymptotes de (C_g).

b) Tracer la courbe (C_g).

2. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans définie par $f(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$.

a) Justifier que pour tout $x \neq 1$, on a : $f(x) = \frac{1}{x-1} - 2$.

b) En déduire que (C_f) s'obtient par une translation à déterminer de la courbe (C_g) .

c) Tracer (C_f) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{-2|x|+3}{|x|-1}$

a) Montrer que h est paire

b) Tracer C_h la courbe représentative de h dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Exercice 3 : (5 points)

On considère un tétraèdre régulier ABCD d'arête a. On pose I milieu du segment [CD].

1. a) Montrer que AIB est le plan médiateur de [CD].
   b) En déduire que les plans (AIB) et (BCD) sont perpendiculaires.
2. Soit G le projeté orthogonal de A sur la droite (BI).
   a) Montrer que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

b) Déduire que (AG) est l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD et que G est le centre de gravité de ce triangle.

c) Montrer que $AG = a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. Soit K le milieu du segment [AG].

a) Calculer, en fonction de a, les distances BK et IK.

b) En déduire que le triangle BIK est rectangle en K.

Exercice 4 : (3 points)

On considère la série statistique suivante :

Classe	[1000,1200[	[1200,1400[	[1400,1600[	[1600,1800[	[1800,2000[	[2000,2200[	[2200,2400[
Effectif	7	7	11	13	14	6	2

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Classe	[1000,1200[	[1200,1400[	[1400,1600[	[1600,1800[	[1800,2000[	[2000,2200[	[2200,2400[
Effectif	7	7	11	13	14	6	2
Centre de classe							
Effectif cumulé croissant							

2. Déterminer la classe modale et la moyenne de cette série.
3. Quelle est la médiane de la série.

Exercice 5: (4 points)

On considère la série statistique suivante :

Valeur x_i	4	8	13	15	18	21	25
Effectif n_i	2	7	11	17	10	7	3

1. Calculer le mode et l'étendue de la série.
2. Déterminer la médiane M_e et les quartiles Q_1 et Q_3 de la série.
3. Compléter le tableau suivant :

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
4	2		
8	7		
13	11		
15	17		
18	10		
21	7		
25	3		
Total			

4. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série.

CORRIGE

Exercice 1 :

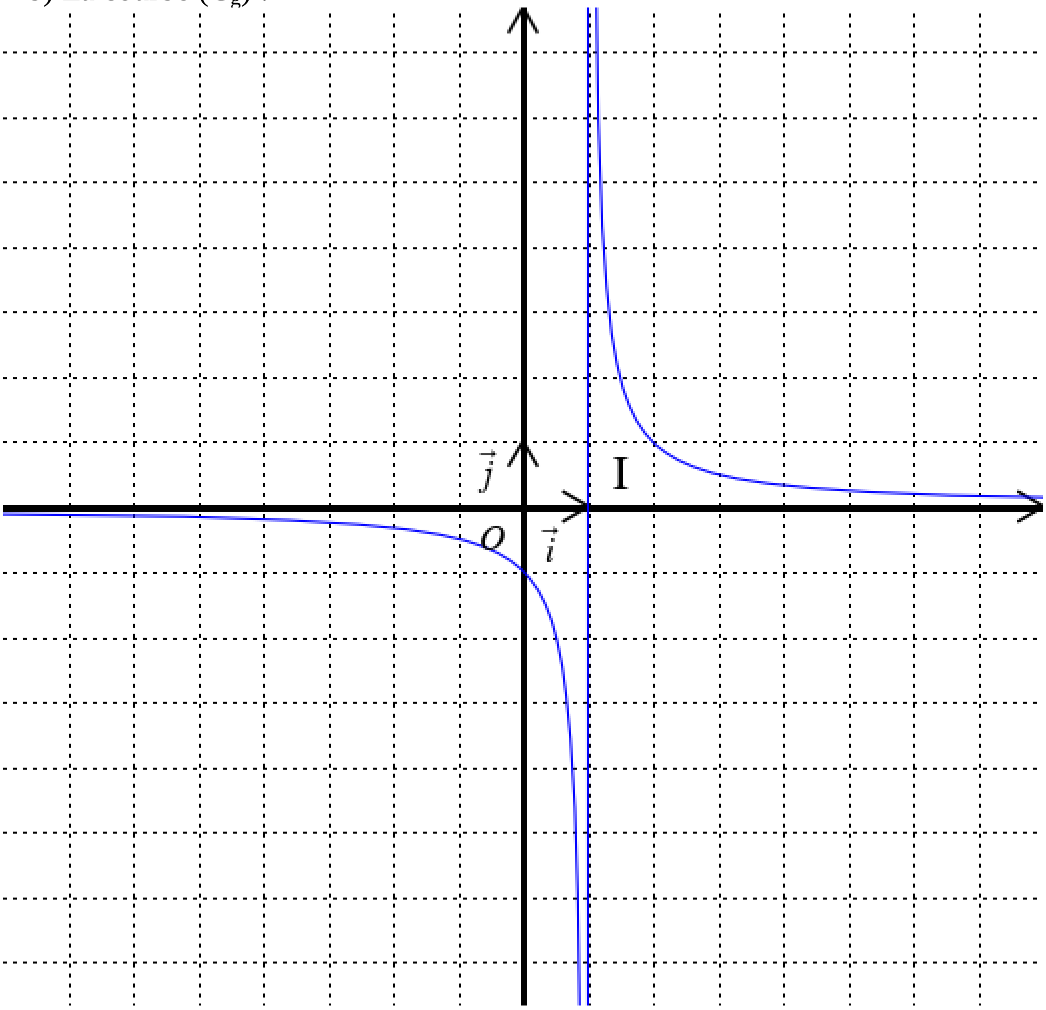
1. a) Vrai ; b) Vrai
2. a) Vrai ; b) Faux
3. a) Faux ; b) Faux

Exercice 2 :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

a) (C_g) est une hyperbole de centre I(1, 0) et d'asymptotes les droites d'équations x = 1 et y = 0.

b) La courbe (C_g) :

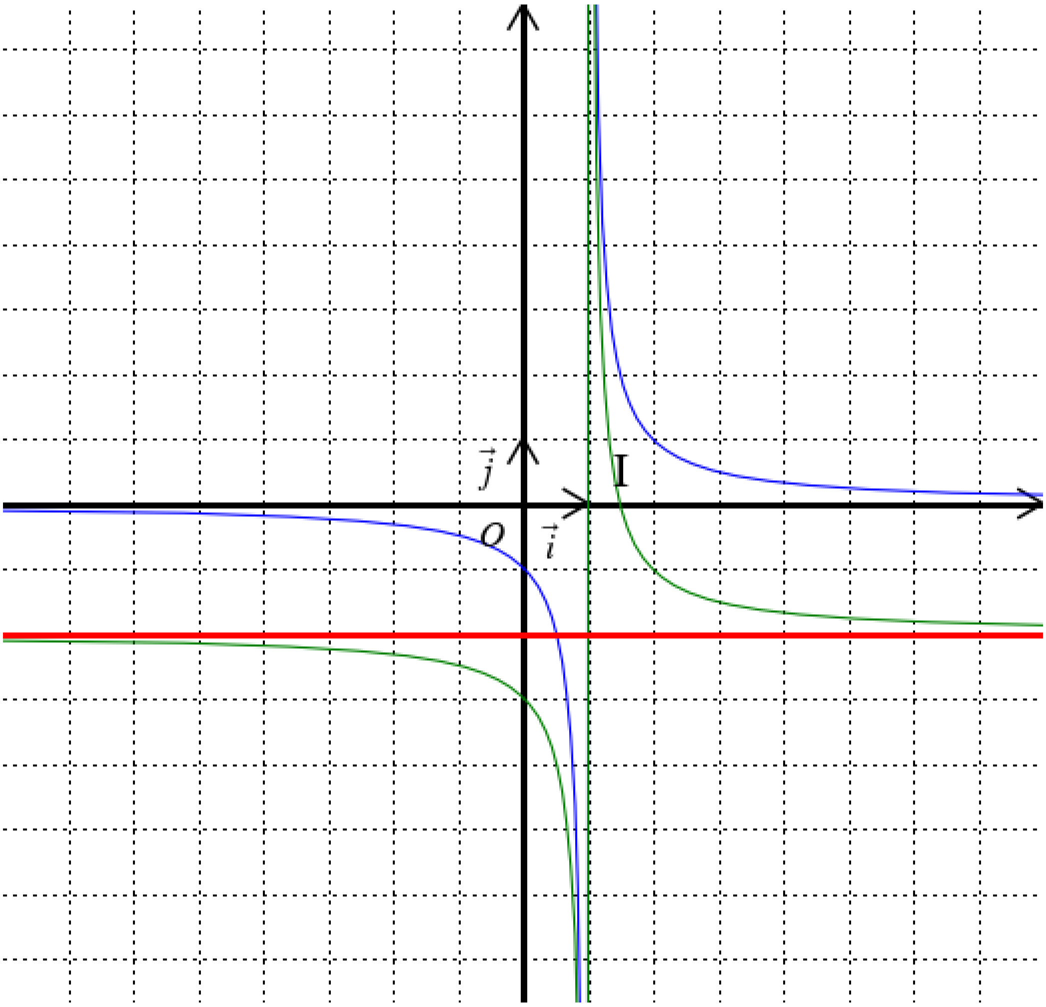


2. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans définie par $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x-1}$.

a) Pour tout $x \neq$ -1, on a : $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-2$.

b) $(C_f)=t_{\vec{u}}\,(C_g)$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

c) La courbe (C_g) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$:

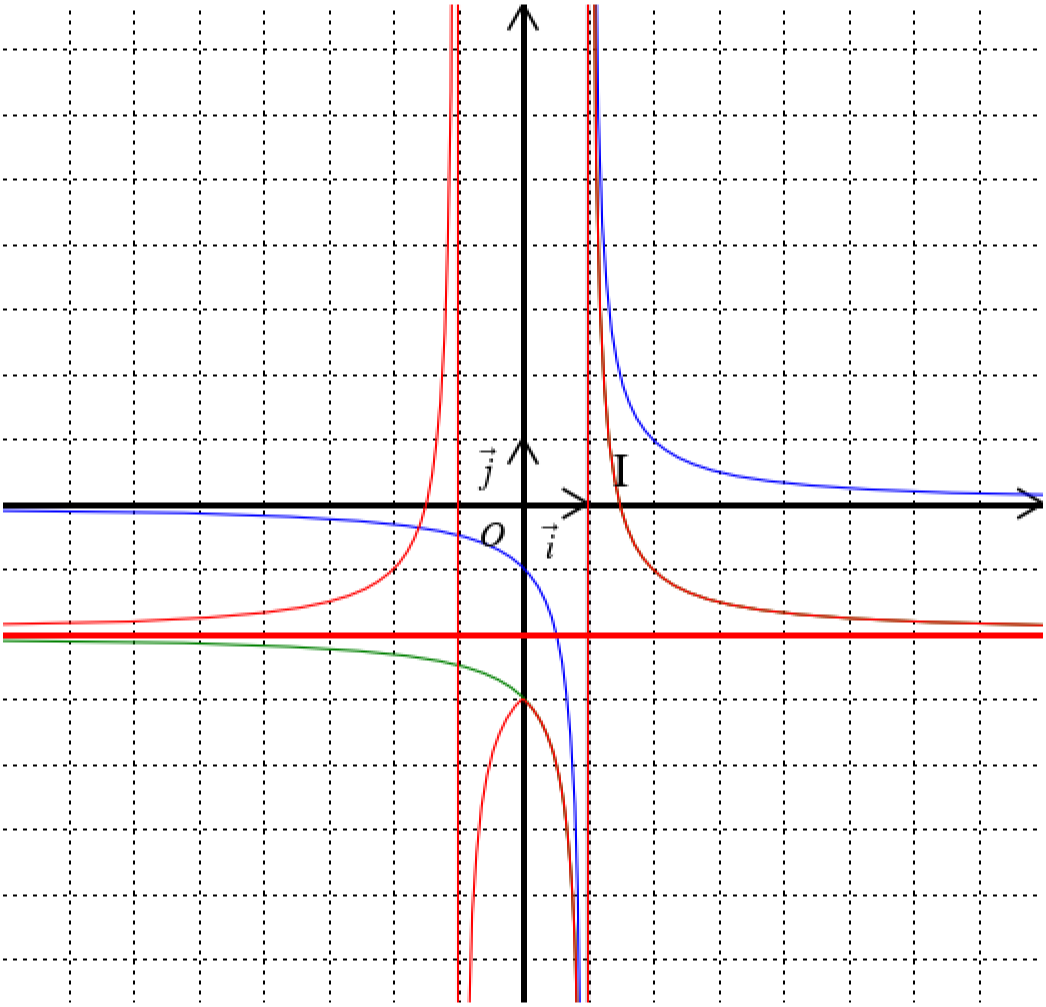


3. Soit h la fonction définie par h(x) = $\dfrac{-2|x|+3}{|x|-1}$

a) L'ensemble de définition de h est $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Si x $\in D_h$ alors (-x) $\in D_h$ et h(-x) = $\dfrac{-2|-x|+3}{|-x|-1} = \dfrac{-2|x|+3}{|x|-1} = h(x)$ donc h est paire

b) La courbe C_h dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:



Exercice 3 :

1. a) On a : I est le milieu du segment [CD] , AC = AD = BC car le tétraèdre ABCD est régulier donc AIB est le plan médiateur de [CD].

b) le plan (AIB) est perpendiculaire à la droite (CD) et la droite (CD) est incluse dans le plan (BCD) donc les plans (AIB) et (BCD) sont perpendiculaires.

2. a) G le projeté orthogonal de A sur la droite (BI) donc (BG) est perpendiculaire à (BI) .
Comme (AG) est incluse dans le plan (AIB) et le plan (AIB) est perpendiculaire à (BCD) alors (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

b) On a : AB = AC = AD et $(AG) \perp (BCD)$ donc (AG) est l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD .
D'où BG= CG = DG et comme ABC est un triangle équilatéral alors G est le centre de gravité de ce triangle.

c) Le triangle AGB est rectangle en G donc $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2}$.

Or AB = a et $BG = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3}\sqrt{BC^2 - CI^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$

Il en résulte : $AG = \sqrt{a^2 - \left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

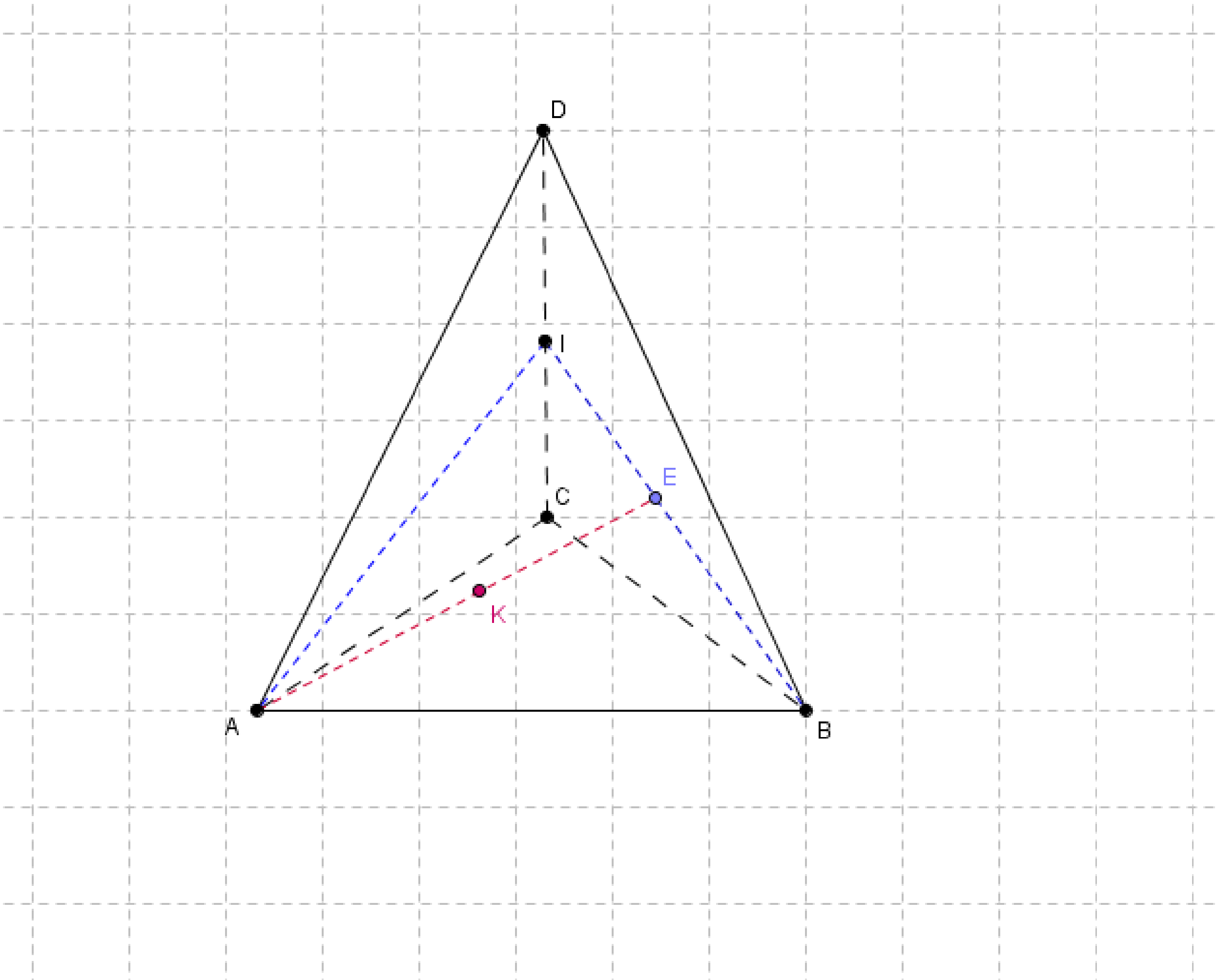
3. Soit K le milieu du segment [AG].

a) K est le milieu du segment [AG] donc $KG = \frac{1}{2}AG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ donc

$$BK = \sqrt{BG^2 + KG^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $$IK = \sqrt{IG^2 + KG^2} = \sqrt{\frac{1}{4}IB^2 + KG^2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

b) On a : $BK^2 + IK^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} = BI^2$ donc le triangle BIK est rectangle en K.



Exercice 4 :

1. Compléter le tableau suivant :

Classe	[1000,1200[	[1200,1400[	[1400,1600[	[1600,1800[	[1800,2000[	[2000,2200[	[2200,2400[
Effectif	7	7	11	13	14	6	2
Centre de classe	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300

Effectif cumulé croissant	7	14	25	38	52	58	60

2. La classe modale de cette série est [1800, 2000[. La moyenne de cette série est : $\bar{x} = \dfrac{99200}{60} \approx 1653$.

3. Calculons la médiane M_e de la série :

L'effectif total N = 60 est pair , $\dfrac{N}{2} = 30$ n'est pas une valeur de l'effectif cumulé croissant.

1600	25
M_e	30
1800	38

$\dfrac{M_e - 1800}{2000 - 1800} = \dfrac{30 - 25}{38 - 25}$ d'où $\dfrac{M_e - 1800}{200} = \dfrac{5}{13}$; on obtient $M_e \approx 1676,92$

Exercice 5:

On considère la série statistique suivante :

Valeur x_i	4	8	13	15	18	21	25
Effectif n_i	2	7	11	17	10	7	3

1. Le mode de la série est 15 et l'étendue de la série est 25 – 4 = 21.
2. Cherchons les effectifs cumulés croissants :

Valeur x_i	4	8	13	15	18	21	25
Effectif n_i	2	7	11	17	10	7	3
Effectif cumulé croissant	2	9	20	37	47	54	57

L'effectif total N = 57 est impair , $\dfrac{N+1}{2} = \dfrac{58}{2} = 29$.

La médiane M_e :

13	20
M_e	29
15	37

$\dfrac{M_e - 13}{15 - 13} = \dfrac{29 - 20}{37 - 20}$ d'où $\dfrac{M_e - 13}{2} = \dfrac{9}{17}$; on obtient $M_e \approx 14,06$

Le quartile Q_1 :

$\dfrac{N}{4} = 14,25$

8	9
Q_1	14,25
13	20

$\dfrac{Q_1 - 8}{13 - 8} = \dfrac{14,25 - 9}{20 - 9}$ d'où $\dfrac{Q_1 - 8}{5} \approx 0,48$; on obtient $Q_1 \approx 10,4$

Le quartile Q_3 :

$\frac{3N}{5} = 42,75$

15	37
Q_3	42,75
18	47

$\frac{Q_3 - 15}{18 - 15} = \frac{42,75 - 15}{47 - 15}$ d'où $\frac{Q_3 - 15}{3} \approx 0,87$; on obtient $Q_3 \approx 17,61$

3. Complétons le tableau suivant :

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
4	2	8	32
8	7	65	520
13	11	143	1859
15	17	255	3825
18	10	180	3240
21	7	147	3087
25	3	75	1875
Total	57	864	14366

4. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série.

La moyenne $\overline{x} = \frac{864}{57} \approx 15,16$, la variance $V = \frac{14366}{57} - \left(\frac{864}{57}\right)^2 \approx 22,51$ et l'écart type $\sigma = \sqrt{V} \approx 4,74$.