| Lycée IBN KHALDOUN<br>Radès<br>Mr ABIDI Farid | Devoir de synthèse n°1<br>$2^{\text{ème}}$ $Sc_2$ | Durée : 2 heures<br>10 Décembre 2010 |
|---|---|---|

**EXERCICE 1 : (3 points)**

Répondre par **Vrai** ou **Faux** pour chacune des informations suivante en justifiant vôtre réponse.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   Les points A(4, 2) , B(2, -2) et C(3, 0) sont alignés.

2. Le nombre $3^{2010} - 3^{2011} + 3^{2012}$ est divisible par 7

3. L'image d'un rectangle par une translation est un rectangle.

**EXERCICE 2 : ( 6 pts )**

On donne $A(x) = -x^2 + x + 6$ et $B(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$ puis factoriser $A(x)$.

   b) Vérifier que $B(x) = (x+2)(2x^2 - 11x + 5)$.

   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = 0$.

2. On pose $F(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

   b) Simplifier $F(x)$.

   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) \geq 0$.

**EXERCICE 3: ( 5 pts )**

1. Donner l'ensemble des diviseurs de 18.

2. Pour tout entier n , on pose : $N = \dfrac{2n+22}{n+2}$.

   a) Vérifier que $N = 2 + \dfrac{18}{n+2}$.

   b) Déterminer tous les entiers n pour lesquels N est un entier.

3. On suppose que N est un entier.

   Quels sont les restes de la division euclidienne de N par 9.

**EXERCICE 4: ( 6 pts )**

L'unité de longueur étant le cm. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB= AC= 5 et BC = 3. On désigne par I le milieu du segment [AB] et J le milieu de [AC]. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{JA}$.

1. Déterminer et construire la droite ( $\Delta$ ) image de la droite (BC) par t.
2. Déterminer l'image de la droite (AC) par t.
3. La parallèle à (AC) passant par B coupe ( $\Delta$ ) en K . Montrer que AJBK est un parallélogramme.
4. Soit F le barycentre des points pondérés (A, 1) , (B, -3) et (C, 1)..

   a) Montrer que F est le barycentre des points pondérés (J, 2) et (B, -3).

   b) Construire le point F.

5. Soit L le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -3).

   Montrer que les droites (LC) et (BJ) sont sécantes en F.

6. Soit F'= t(F). Montrer que les points A, K et F' sot alignés.

Corrigé

## EXERCICE 1

1. Vrai

   En effet : on a , $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ d'où les points A, B et C sont alignés.

2. Vrai

   En effet : $3^{2010}-3^{2011}+3^{2012}=3^{2010}\left(1-3+9\right)=3^{2010}\times 7$ .

3. Vrai

   En effet : les images de deux droites parallèles ( respectivement perpendiculaires) par une translation sont deux droites parallèles ( respectivement perpendiculaires).

## EXERCICE 2

1. a) A(x) = 0 équivaut à $-x^2+x+6=0$.

   Le discriminant est $\Delta=1+24=25$ d'où les racines de l'équation A(x) = 0 sont :

   $$x_1=\frac{-1-5}{-2}=3 \text{ et } x_2=\frac{-1+5}{-2}=-2$$

   Pour tout x réel , $A(x)=-(x-3)(x+2)$ .

   b) Pour tout x réel,

   $$\begin{aligned}(x+2)(2x^2-11x+5)&=2x^3-11x^2+5x+4x^2-22x+10\\&=2x^2-7x^2-17x+10=B(x)\end{aligned}.$$

   c) B(x) = 0 équivaut à x = -2 ou $2x^2-11x+5=0$.

   Le discriminant de l'équation $2x^2-11x+5=0$ est $\Delta=121-40=81$ d'où les racines de l'équation $2x^2-11x+5=0$ sont :

   $$x'_1=\frac{11-9}{4}=\frac{1}{2} \text{ et } x'_2=\frac{11+9}{4}=5$$

   Donc l'ensemble des solutions de l'équation B(x) = 0 est $\left\{-2,\frac{1}{2},5\right\}$.

2.a) L'ensemble D de définition de F est l'ensemble des réels x tels que A(x) ≠ 0 donc $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$.

b) Pour tout x de D, $F(x)=\frac{B(x)}{A(x)}=\frac{(x+2)\left(2x^2-11x+5\right)}{-(x-3)(x+2)}=\frac{2x^2-11x+5}{-x+3}$ .

c) Dressons un tableau de signe :

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x+3$ | | + | | + | | + | 0 | - | | - | |
| $2x^2-11x+5$ | | + | | + | 0 | - | | - | 0 | + | |
| F(x) | | + | | + | 0 | - | | + | 0 | - | |

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation F(x) ≥ 0 est $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-2,\frac{1}{2}\right]\cup\left]3,5\right]$.

## EXERCICE 3

1. L'ensemble des diviseurs de 18 est $\{1,2,3,6,9,18\}$.
2. a) $2+\frac{18}{n+2}=\frac{2(n+2)+18}{n+2}=\frac{2n+22}{n+2}=N$.

   b) N est entier naturel équivaut à n+2 divise 18

   équivaut à (n+2) ∈ I just want you ...

   d'où n ∈ $\{0,1,4,7,16\}$
3. Soit r le reste dans la division euclidienne de N par 9.

| n | N | **r** |
|---|---|---|
| 0 | 11 | **2** |
| 1 | 8 | **8** |
| 4 | 5 | **5** |
| 7 | 4 | **4** |
| 16 | 3 | **3** |

## EXERCICE 4

1. J est le milieu du segment [AC] donc $\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{CA}$ donc t(C) = J .
   Il en résulte : Δ= t((BC)) est la parallèle à la droite (BC) passant par t(C) = J donc Δ = (IJ).
2. $\overrightarrow{JA}$ est un vecteur directeur de (AC) donc t((AC)) = (AC).
3. On a : (JC) // (BK) et (BC) // (IJ) donc JCBK est un parallélogramme

   Donc $\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{KB}$ et comme $\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AJ}$ alors $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{KB}$. Et par suite : AJBK est un parallélogramme.

4. a) F est barycentre de (A, 1) , (B, -3) et (C, 1) équivaut à $\overrightarrow{FA}-3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$

   équivaut à $2\overrightarrow{FJ}-3\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{0}$ équivaut à F est le barycentre de (J 2) et (B,-3).

   b) F est le barycentre de (J, 2) et (B,-3) équivaut à $\overrightarrow{FJ}=3\overrightarrow{JB}$.

5. L barycentre de (A,1) et (B, -3) donc $\overrightarrow{FA}-3\overrightarrow{FB}=-2\overrightarrow{FL}$.

   Donc : $\overrightarrow{FA}-3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$ équivaut à $-2\overrightarrow{FL}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$ équivaut à F barycentre de (L, -2) et (C, 1) . Et par suite, F appartient à la droite (LO).
   Or F appartient à la droite (BJ) , il en résulte que les droites (LC) et (BJ) sont sécantes en F.
6. J, B et F sont alignés donc t(J) = A , t(B) = K et t(F) = F' sont alignés.