



Trinôme du second degré & Polynôme

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $x^2 + 4x - 21 = 0$
2. $x^2 - 7x + 10 = 0$
3. $-x^2 + 6x - 10 = 0$
4. $3x^2 + 6x - 3 = 0$
5. $\frac{2x}{x-1} = \frac{x}{x-2}$
6. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x^2+x-6}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $\sqrt{4-x} = x-2$.
2. $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$
3. $\sqrt{2x-6} = x-3$

Exercice 3

Soit $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ un polynôme de degré trois.

1. Calculer $P(-3)$.
2. Déterminer un polynôme de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont trois constantes réelles) tel que l'on ait $P(x) = (x+3)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer les racines de Q . En déduire sa factorisation.
4. Factoriser P , puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$ (on dressera un tableau de signe).

Exercice 4

Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 116x - 480$ un polynôme.

1. Calculer $P(-5)$.
2. Déterminer un polynôme Q tel que l'on ait $P(x) = (x+5)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer les racines de Q .
4. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.



Trinôme du second degré & Polynôme

Corrigé

Exercice 1

1. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times (-21) = 100$.
Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 - 10}{2} = -7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 + 10}{2} = 3$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{-7; 3\}$

2. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 10 = 9$.
Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{2; 5\}$.

3. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = -4$.
Comme $\Delta < 0$, elle n'admet donc solution réelle.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \emptyset$

4. On a ici $3x^2 + 6x - 3 = 0$ équivaut à $x^2 + 2x - 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) = 8$.
Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$.

5. L'expression $\frac{2x}{x-1}$ est définie lorsque $x - 1 \neq 0$ soit $x \neq 1$.

L'expression $\frac{x}{x-2}$ est définie lorsque $x - 2 \neq 0$ soit $x \neq 2$.

Ainsi l'équation est définie lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Pour un tel x $\frac{2x}{x-1} = \frac{x}{x-2}$ équivaut à $2x(x-2) = x(x-1)$

équivaut à $2x^2 - 4x = x^2 - x$

équivaut à $x^2 - 3x = x(x-3) = 0$

équivaut à $x = 0$ ou $x = 3$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{0; 3\}$.



Trinôme du second degré & Polynôme

Corrigé

$$\begin{aligned}
 6. \text{ On a } \sqrt{3x+2} &= \sqrt{x^2+x-6} \text{ équivaut à } 3x+2 = x^2+x-6 \\
 &\text{équivaut à } x^2-2x-8=0 \\
 &\text{équivaut à } (x-1)^2-3^2=0 \\
 &\text{équivaut à } (x+2)(x-4)=0 \\
 &\text{équivaut à } x=-2 \text{ ou } x=4
 \end{aligned}$$

Vérifions maintenant si ces nombres sont bien des solutions de l'équation.

Pour $x = -2$, on a $3x+2 = 3 \times (-2) + 2 = -4 < 0$ donc $\sqrt{3x+2}$ n'est pas définie.

Pour $x = 4$, on a $3x+2 = 3 \times 4 + 2 = 14$ et $x^2+x-6 = 4^2+4-6 = 14$: cela convient.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{4\}$.

Exercice 2

1. L'expression $\sqrt{4-x}$ est définie lorsque $4-x \geq 0$ soit $x \leq 4$; de plus, l'expression $x-2$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation proposée est définie lorsque $x \leq 4$.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } x \leq 4, \quad \sqrt{4-x} = x-2 \text{ équivaut à } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x = (x-2)^2 \end{cases} \\
 \text{équivaut à } \begin{cases} x \geq 2 \\ 4-x = x^2-4x+4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } 4-x = x^2-4x+4 \text{ équivaut à } x(x-3) = 0 \text{ équivaut à } x=0 \text{ ou } x=3$$

La seule solution de cette équation appartenant à l'intervalle $[2; 4]$ est 3, donc

$$\text{L'ensemble des solutions de l'équation } \sqrt{4-x} = x-2 \text{ est } S = \{3\}$$

2. L'expression $\sqrt{x+12}$ est définie lorsque $x+12 \geq 0$ soit $x \geq -12$.

L'expression $\sqrt{x^2+2x-8}$ est définie lorsque $x^2+2x-8 \geq 0$, donc à l'extérieur des racines de ce trinôme du second degré. Son discriminant est

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-8) = 4 + 32 = 36$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

et

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$



Trinôme du second degré & Polynôme

Corrigé

Ainsi, l'expression $\sqrt{x^2 + 2x - 8}$ est définie lorsque $x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$.

L'équation proposée est donc définie lorsque

$$x \geq -12 \text{ et } x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$$

soit lorsque $x \in [-12; -4] \cup [2; +\infty[$

Pour tout $x \in [-12; -4] \cup [2; +\infty[$, on a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{x+12} = \sqrt{x^2 + 2x - 8} & \text{ équivaut à } x+12 = x^2 + 2x - 8 \\ & \text{ équivaut à } x^2 + x - 20 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-20) = 81$$

Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 9}{2} = -5$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 9}{2} = 4$$

Ces deux nombres appartiennent bien à l'ensemble $[-12; -4] \cup [2; +\infty[$, donc

L'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ est $S = \{-5; 4\}$

3. La quantité $\sqrt{2x-6}$ est définie lorsque $x \geq 3$; de plus, la quantité $x-3$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation proposée est définie lorsque $x \geq 3$.

Dans ce cas, les deux membres de l'équation sont positifs donc elle équivaut à l'égalité de leurs carrés.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \geq 3, \quad \sqrt{2x-6} = x-3 & \text{ équivaut à } 2(x-3) = (x-3)^2 \\ & \text{ équivaut à } (x-3)(x-3-2) = 0 \\ & \text{ équivaut à } (x-3)(x-5) = 0 \\ & \text{ équivaut à } x = 3 \text{ ou } x = 5 \end{aligned}$$

Ces deux nombres sont bien supérieurs ou égaux à 3, donc

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{3, 5\}$



Trinôme du second degré & Polynôme

Corrigé

Exercice3

$$1. P(-3) = (-3)^3 + 5 \times (-3)^2 - 2 \times (-3) - 24 = -27 + 5 \times 9 + 6 - 24 = -27 + 45 + 6 - 24 = 0.$$

2. Comme $P(-3) = 0$, on sait que $P(x)$ se factorise par $(x + 3)$.

Cherchons alors $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $P(x) = (x + 3)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad (x + 3)Q(x) &= (x + 3)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c \\ &= ax^3 + (3a + b)x^2 + (3b + c)x + 3c \end{aligned}$$

On sait que deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les mêmes coefficients. De ce fait, la relation

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = (x + 3)Q(x)$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 5 \\ 3b + c = -2 \\ 3c = -24 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 - 3a \\ c = -2 - 3b \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -8 \end{cases}$$

$$\text{Donc} \quad Q(x) = x^2 + 2x - 8 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. Le polynôme du second degré Q a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-8) = 36$.

Comme $\Delta > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles distinctes, à savoir

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 - 6}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

Ainsi l'ensemble des zéros de Q est $\{-4; 2\}$.

$$\text{On en déduit que} \quad Q(x) = (x + 4)(x - 2) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. Comme $P(x) = (x + 3)Q(x)$ d'après la question 2, il s'ensuit que

$$P(x) = (x + 3)(x + 4)(x - 2) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	-4	-3	2	$+\infty$
$(x + 4)$	-	0	+	+	+
$(x + 3)$	-	-	0	+	+
$(x - 2)$	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+



Trinôme du second degré & Polynôme

Corrigé

Exercice 4

$$1. P(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 - 2(-3) - 24 = -27 + 45 - 6 - 24$$

$$\text{Ainsi } P(-5) = 0.$$

2. Comme $P(-5) = 0$, on sait que le polynôme $P(x)$ se factorise par $(x + 5)$: de ce fait,

Il existe un polynôme Q du second degré tel que $P(x) = (x + 5)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$, Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b + 5a)x^2 + (c + 5b)x + 5c$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = 5 \\ 5b + c = -2 \\ 5c = -24 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -96 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } Q(x) = x^2 - 4x - 96 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. Le discriminant du polynôme Q du second degré est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-96) = 4 \times 4 + 4 \times 96 = 400$$

Comme $\Delta > 0$, le polynôme Q admet deux zéros distincts :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{400}}{2 \times 1} = \frac{4 - 20}{2} = -8$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{400}}{2 \times 1} = \frac{4 + 20}{2} = 12$$

Ainsi les zéros de Q sont -8 et 12

4. D'après les résultats des questions 2 et 3, on a

$$\begin{aligned} P(x) = 0 & \quad \text{équivalent à} \quad (x + 5)Q(x) = 0 \\ & \quad \text{équivalent à} \quad x + 5 = 0 \quad \text{ou} \quad Q(x) = 0 \\ & \quad \text{équivalent à} \quad x = -5 \quad \text{ou} \quad x = -8 \quad \text{ou} \quad x = 12 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ est $S = \{-8; -5; 12\}$.