



Homothétie

Exercice 1 :

Soit (D) et (Δ) deux droites du plan sécantes en un point O et A un point de (D) distinct de O . On considère l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$ et l'on pose $A' = h(A)$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur unitaire de (Δ) et soit B le point de (Δ) d'abscisse 3.

Montrer que la parallèle à la droite (AB) , passant par A' , coupe (Δ) au point B' d'abscisse 2.

En déduire une construction du point A' .

Exercice 2 :

Soit O et A deux points distincts.

Construire l'image A' de A par l'homothétie h de centre O et de rapport $-\frac{3}{4}$.

Exercice 3 :

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A et h l'homothétie de centre O . On pose $D'_1 = h(D_1)$ et $D'_2 = h(D_2)$.

Montrer que (D'_1) et (D'_2) sont sécantes en un point A' et que les points O , A et A' sont alignés.

Exercice 4 :

Soit (D) une droite, A et B deux points distincts n'appartenant pas à (D) .

Pour tout point M de (D) , on désigne par G le centre de gravité du triangle ABM .

Déterminer l'ensemble des points G .

Exercice 5 :

Soit A , B , A' et B' quatre points distincts tels que les droites (AB) et $(A'B')$ soient strictement parallèles.

Rechercher les homothéties h telles que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$.



Homothétie

Exercice 6 :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O , A , B et C sont trois points de $(\mathcal{C})$ tel que les droites (OA) et (BC) soient parallèles. On désigne par A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Montrer que le centre O' du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ appartient à la droite (BC) .

Exercice 7 :

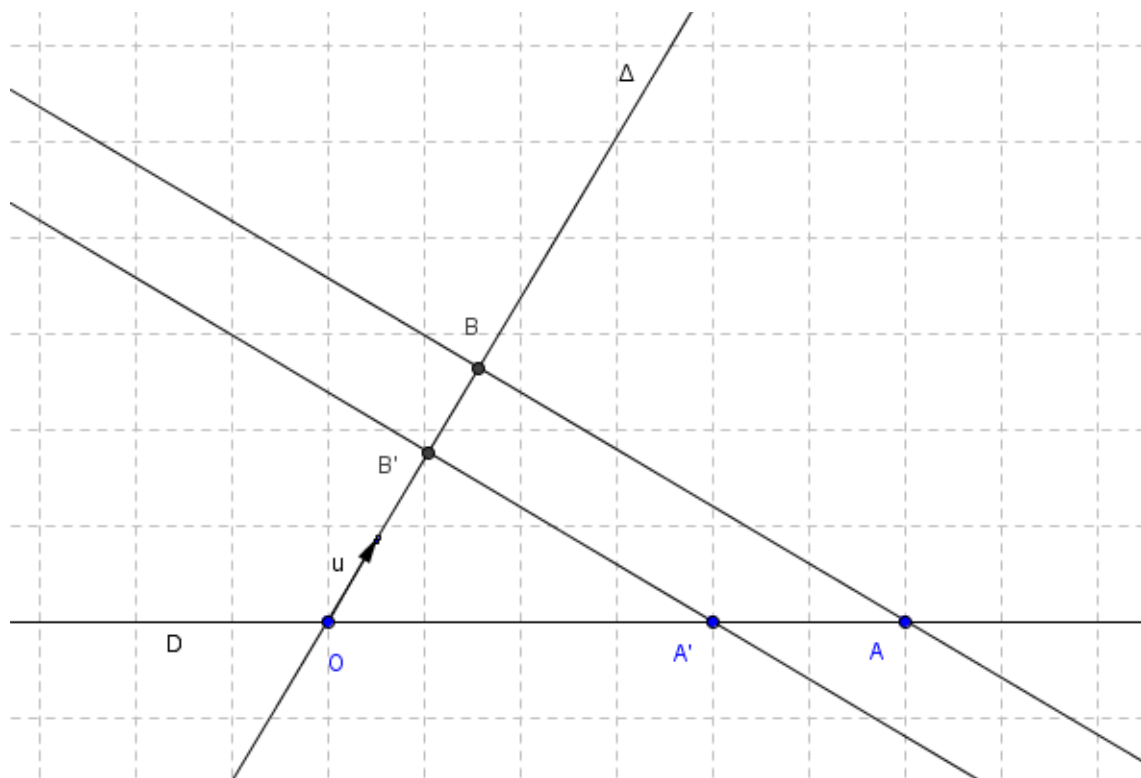
Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R et A un point de (C) . On considère les triangles ABC inscrits dans (C) et tels que $BC = 2d$ où d est un réel strictement positif donné inférieur à $2R$.

Déterminer l'ensemble des centres de gravité G des triangles ABC .



Homothétie Corrigé

Exercice 1 :



Du théorème de Thalès, il résulte : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

Le point A' est l'image de A par h ; on a donc $\overrightarrow{OA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ d'où $\frac{OA'}{OA} = \frac{2}{3}$.

On en déduit $\frac{OB'}{OB} = \frac{2}{3}$ d'où $OB' = \frac{2}{3}OB = 2$.

Le point B' est donc le point de (Δ) d'abscisse 2.

Pour construire le point A' image de A par h, on utilise donc la démarche suivante :

On choisit une unité de longueur, puis un repère normé $(O, \vec{u})$ sur (Δ).

On marque sur (Δ) les points B et B' d'abscisse respective 3 et 2.

On construit la parallèle à la droite (AB) passant par B'.

A' est le point d'intersection de (D) et de cette droite.

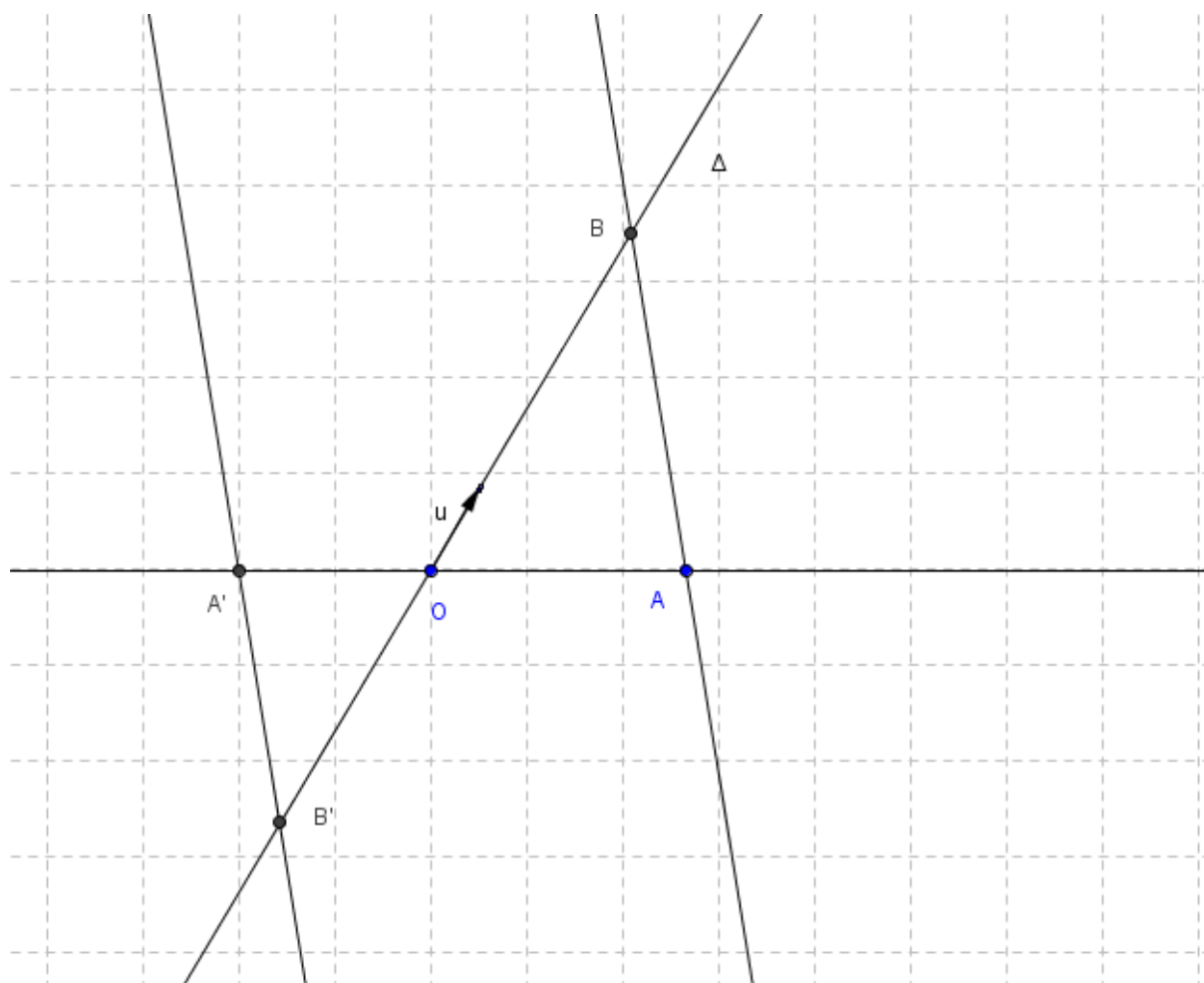


Homothétie Corrigé

Exercice 2:

Comme dans l'exercice précédent, on construit une droite (Δ) distincte de la droite (OA) et passant par O ; on choisit un repère normé de (Δ) et on marque les points B et B' d'abscisses 4 et -3.

Le point $A' = h(A)$ est le point d'intersection de la droite (OA) et de la parallèle à la droite (AB) passant par B' .





Homothétie Corrigé

Exercice 3 :

Le point A appartient à la droite (D_1) , donc le point $h(A)$ appartient à la droite (D'_1) .

De même, appartient à la droite (D_2) , donc le point $h(A)$ appartient à la droite (D'_2) .

Il en résulte que (D'_1) et (D'_2) sont sécantes et leur point d'intersection est le point $A' = h(A)$.

H est une homothétie de centre O et $A' = h(A)$, donc O, A et A' sont alignés.

Exercice 4 :

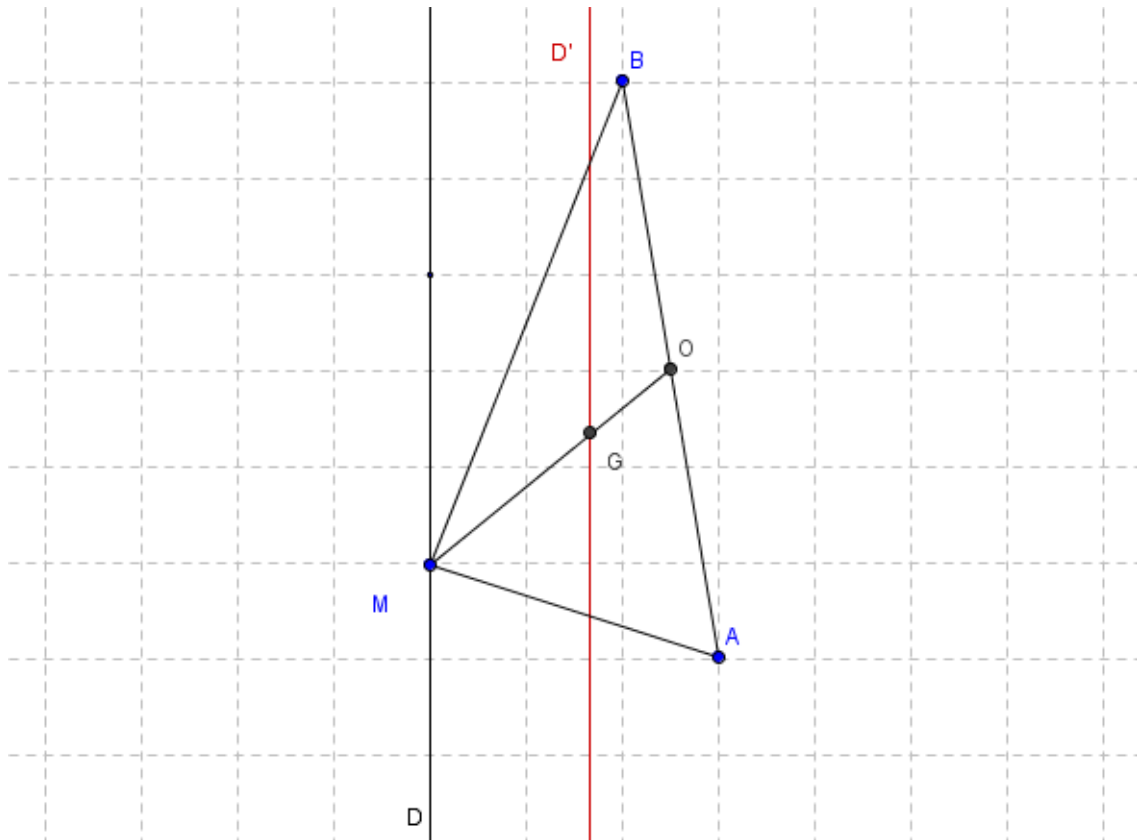
Soit O le milieu du segment [AB]. On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$.

Le point G est donc l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$

L'ensemble des points M est la droite (D), donc l'ensemble des points G est la droite $D' = h(D)$.



Homothétie Corrigé



Exercice 5 :

S'il existe une homothétie h de centre O et de rapport k telle que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$, alors O appartient à (AA') et à (BB') et k est le réel tel que $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$.

Une condition nécessaire pour que de telles homothéties existent est donc

$(AA') \cap (BB') \neq \emptyset$ c'est-à-dire $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.

Réciproquement : si $(AA') \cap (BB') \neq \emptyset$, l'homothétie de centre O , point d'intersection des droites (AA') et (BB') , et de rapport k , réel tel que $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$ est l'unique homothétie h telle que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$.

Exercice 6 :

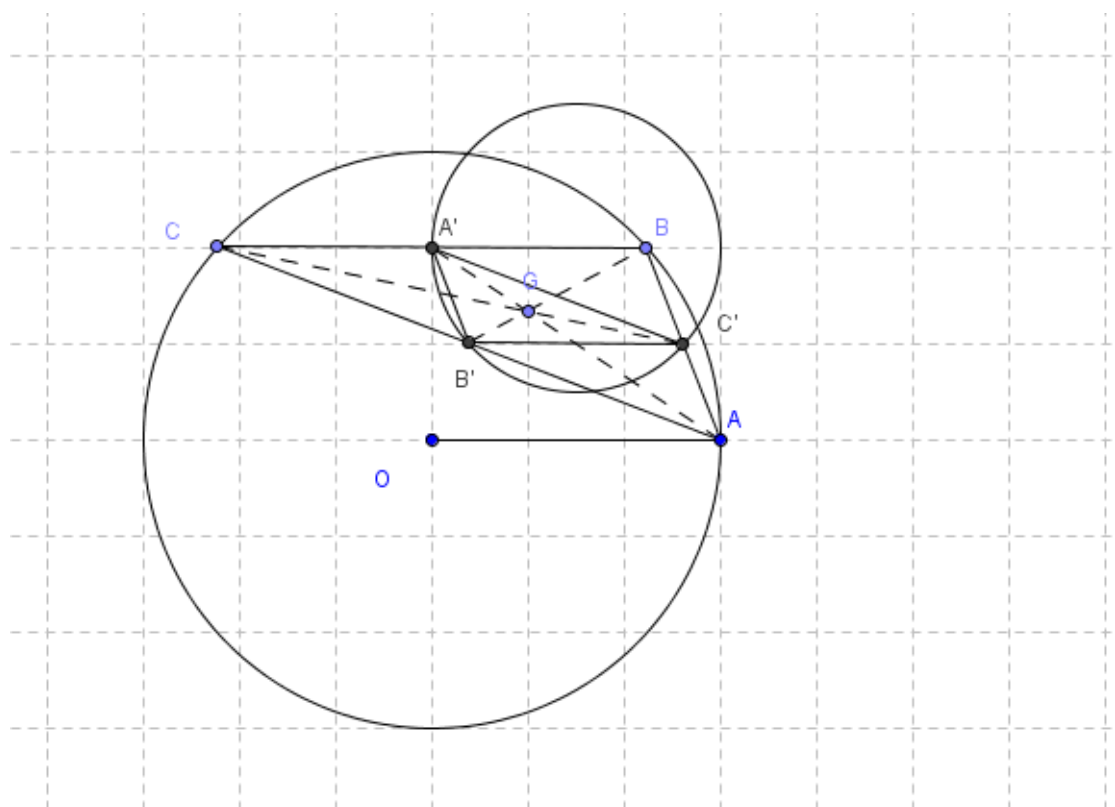
Soit G le centre de gravité du triangle ABC . On a :

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GA}, \quad \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GC}.$$

Et donc, si l'on désigne par h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, on a : $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.



Homothétie Corrigé



L'image par h du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC est donc le cercle $(\mathcal{C}')$ circonscrit au triangle $A'B'C'$.

Il en résulte que le centre O' de $(\mathcal{C}')$ est définie par $O' = h(O)$.

Les droites (OA) et $(O'A')$ sont donc parallèles.

(OA) et (BC) sont par hypothèse parallèles donc $(O'A') = (BC)$ et par suite O' appartient à (BC) .

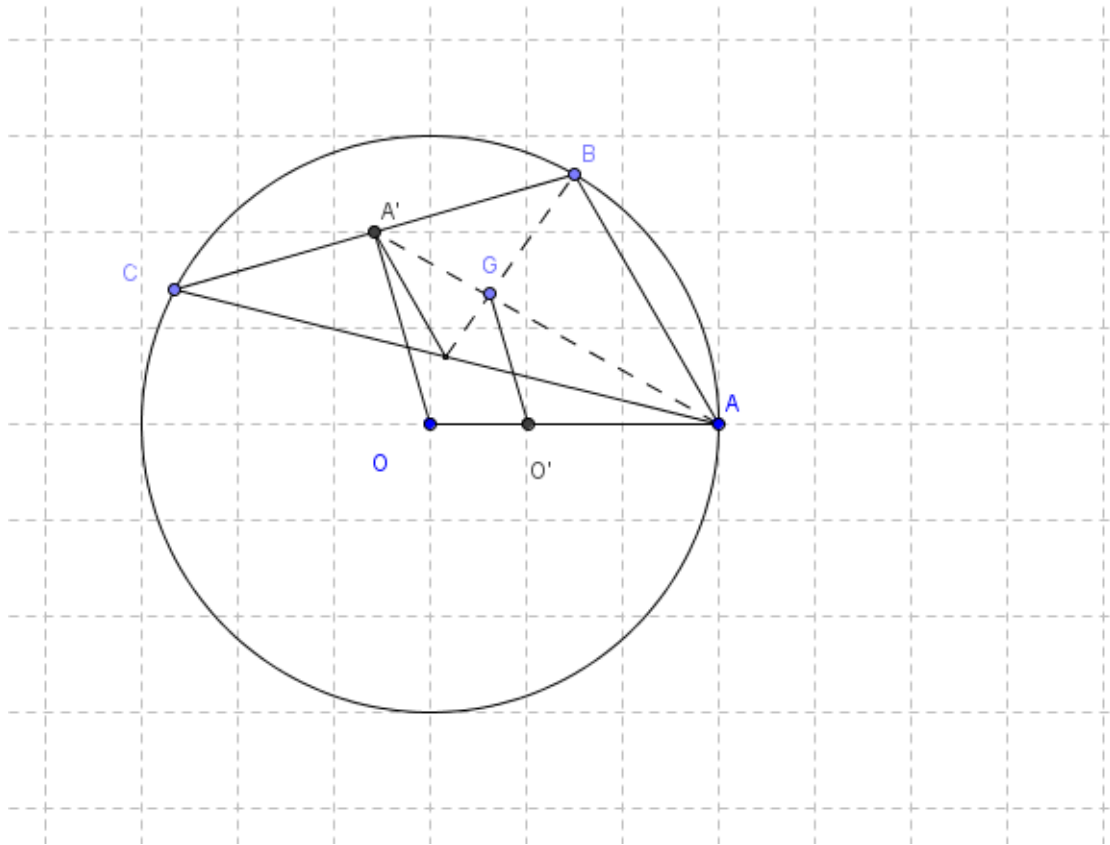
Exercice 7:

Soit A' le milieu de $[BC]$. A' est le projeté orthogonale de O sur (BC) ; il en résulte du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBA' :

$$OB^2 = OA'^2 + A'B^2 = OA'^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = OA'^2 + \frac{d^2}{4} \quad \text{d'où} \quad OA'^2 = R^2 - \frac{d^2}{4}.$$



Homothétie Corrigé



On a d'autre part $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ donc l'ensemble des points G est le cercle $(\mathcal{C}_2)$ image du cercle $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.