Espace

Exercice 1

ABC est un triangle rectangle isocèle en *A* avec *AB* = 4 cm, I est le milieu de [*BC*]. On même par *I* une perpendiculaire au plan (*ABC*), et *O* est sur cette droite, tel que *OI* = *IA*.

1) Faire une figure claire.
2) Montrer que les points *O*, *A*, *B*, *C* sont sur une sphère de centre *I* dont on donnera le rayon.
3) Montrer que (*AI*) est perpendiculaire au plan (*OBC*)
4) Quelle est la nature des triangles OAB et OAC ?
5) Soit *J* le milieu de [*OA*]. Calculer *IJ* et montrer que (*IJ*) est perpendiculaire à (*OA*) et (*BC*)

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1) *ABCD* est un carré de centre *O*, de côté *a*. *S* est un point de la perpendiculaire en *O* au plan (*ABCD*) et on pose *OS* = *h*. Calculer en fonction de *a* et *h* les côtés et le volume de la pyramide *SABC*. Sachant que la pyramide de Kheops a pour base un carré de 227 m de côté et pour faces des triangles isocèles de 217 m d'arête, calculer sa hauteur.
2) Un verre a la forme d'un cône posé sur la pointe. Le rayon du cercle de base est de 3 cm, la hauteur du cône est de 10 cm. Calculer le volume disponible. Si on le remplit à mi-hauteur, combien de liquide a-t-on ?

Exercice 3

BCED est un parallélogramme de centre *O* et *A* est un point extérieur au plan (*BCDE*). On appelle *I* le milieu de [*AB*] et *G* le centre de gravité de *ACD*.

1) Faire une figure.
2) Montrer que (*EC*) est parallèle au plan (*ABD*).
3) Que peut-on en déduire pour les droites (*EC*) et (*AD*) ?
4) Quelle est l'intersection des plans (*ADE*) et (*ABC*) ?
5) Montrer que *G* est le centre de gravité de *ABE*.
6) Que peut on en déduire pour les points *E, I, G* ?

Espace

Exercice 4

$ABCD$ est un tétraèdre, I est un point de l'arête $[BC]$, J un point de $[CD]$. N est un point de $[AJ]$ et M un point de la demi-droite $[AI)$ extérieur au segment $[AI]$

1) Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?
2) Déterminer l'intersection de (MN) et (BCD).
3) En déduire l'intersection des plans (MNB) et (BCD).

Exercice 5

$SABCD$ est une pyramide de sommet S, de base un parallélogramme $ABCD$. Les points M et N sont Les points M et N sont les milieux respectifs des arêtes $[SC]$ et $[SB]$.

1) Que peut-on dire des droites (MN) et (AD) ?
2) Montrer que les droites (AN) et (DM) sont coplanaires. Soit P leur point d'intersection.
3) Quelle est l'intersection des plans (SAB) et (SDC) ?
4) Montrer que les droites (SP) et (AB) sont parallèles.

Exercice 6

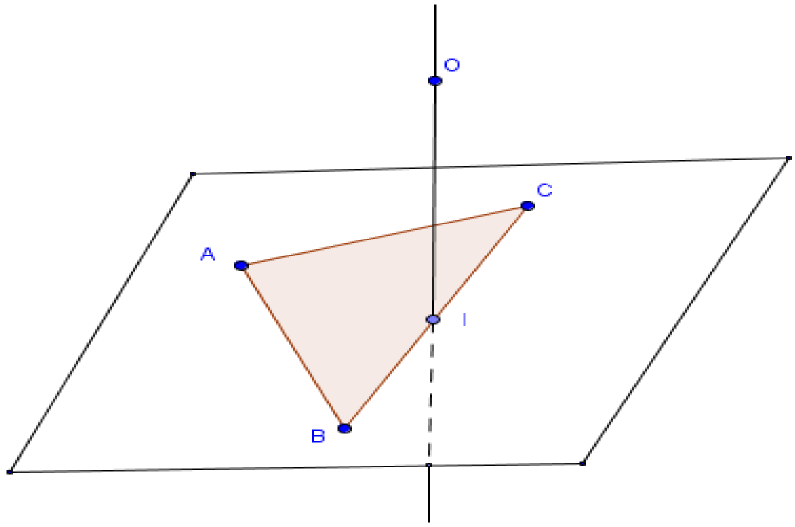
$ABCD$ est un tétraèdre, une droite $\mathscr{D}$ parallèle au plan (BCD) coupe (ABC) en I.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan $(A, \mathscr{D})$. J est le point d'intersection de (AI) et (BC).

1) Montrer que l'intersection de $\mathscr{P}$ et (BCD) est la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par J.
2) En déduire l'intersection de $\mathscr{P}$ et (ACD).
3) Construire l'intersection de $\mathscr{D}$ et (ACD)

Espace

Exercice 1

1)



2) *ABC* est un triangle rectangle isocèle en *A*, donc *I*, milieu de son hypoténuse est aussi le centre de son cercle circonscrit. On a donc *IA* = *IB* = *IC*. Comme par hypothèse *IO* = *IA*, les quatre points *O*, *A*, *B*, *C* son bien sur une même sphère de centre *I*. Le rayon de cette sphère est égal à la moitié de *BC*. Or *BC* est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 4 cm, on a donc $BC = 4\sqrt{2}$ cm, et le rayon de la sphère vaut donc $2\sqrt{2}$ cm.

3) La droite (*OI*) est perpendiculaire au plan (*ABC*) donc est orthogonale à toute droite de ce plan. (*OI*) est donc perpendiculaire à (*BC*). (*AI*), médiane du triangle isocèle *ABC*, est aussi sa hauteur, donc (*AI*) est orthogonale à (*BC*). (*BC*), orthogonale à deux sécantes du plan (*AOI*), est donc orthogonale à ce plan.

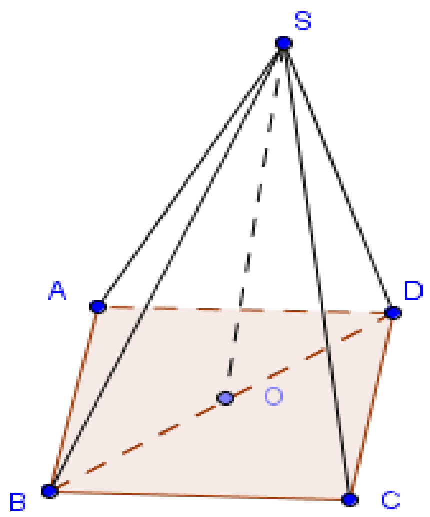
4) (*OI*) est orthogonale à toute droite du plan (*ABC*), donc en particulier à (*IA*) , (*IB*) et (*IC*). Les triangles *IOA*, *IOB* et *IOC* sont donc rectangles en *I*, et isocèles d'après la première question, de côtés *IA* = *IB* = *IC* = *IO* = $2\sqrt{2}$ cm. Leurs hypoténuses respectives *OA*, *OB*, *OC* ont donc pour longueur $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$ cm qui est aussi égale à *AB* et *AC*. Les triangles *AOC* et *AOB* sont donc équilatéraux.

5) *J* est le milieu de [*OA*]. *J*, milieu de l'hypoténuse du triangle *IOA* (qui est rectangle isocèle en *I*). *IJ* est donc égal à la moitié de cette hypoténuse, donc *IJ* = 2 cm.
(*IJ*), médiane du triangle isocèle *IOA*, en est aussi la hauteur, donc (*IJ*) et (*OA*) sont perpendiculaires. D'autre part, (*IJ*) est une droite du plan (*IOA*), et on a vu au 3) que (*BC*) était orthogonale à (*IAO*). (*BC*) est donc orthogonale à toute droite de (*IOA*), donc en particulier à (*IJ*). Comme ces droites sont sécantes en *I*, elles sont perpendiculaires.

Espace

Exercice 2

1) Si *ABCD* est un carré de côté *a* et de centre *O*, alors sa diagonale vaut $AC = BD = a\sqrt{2}$, donc $OA = OB = OC = OD = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. La droite (*OS*) perpendiculaire au plan du carré, est



sont donc rectangles en *O*, de côtés *OS* = *h* et $OA = OB = OC = OD = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. La longueur de leurs hypoténuses *SA*, *SB*, *SC*, *SD* qui sont les côtés de la pyramide, vaut donc d'après le théorème de Pythagore : $l = SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$. Le volume de la pyramide vaut le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur, $V = \frac{a^2h}{3}$

Dans la Pyramide de Kheops, on connaît la valeur de *a* (227 m) et celle de *l*(217 m), et on veut *h*. On a donc $l^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$ donc $h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{217^2 - \frac{227^2}{2}} = \sqrt{\frac{4269}{2}} \approx 146$ m

2) Le volume du cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base $\pi \times 3^2 = 9\pi$ par sa hauteur, on obtient $V = \frac{1}{3} \times 9\pi \times 10 = 30\pi \approx 94$ cm^3. Si on le remplit à mi-hauteur, la hauteur devient 5 cm, mais le cercle de base a aussi diminué, d'après le théorème de Thalès son rayon n'est plus que 1,5 cm. Le volume de liquide restant est donc $V = \frac{1}{3} \times 1{,}5^2 \times \pi \times 5 = \frac{15}{4}\pi \approx 12$ cm^3, donc 8 fois moins.

Espace

Exercice 3

BCED est un parallélogramme de centre *O*. *A* est un point extérieur au plan (*BCE*).

1) Figure.

2) La droite (*EC*) est parallèle à (*BD*), donc elle est parallèle à une droite de (*ABD*), donc elle est parallèle au plan (*ABD*).

3) Comme (*AD*) est incluse dans (*ABD*), elle ne peut pas couper (*EC*). Comme (*EC*) est parallèle à (*BD*), (*EC*) ne peut pas être parallèle à (*AD*), sinon (*BD*) et (*AD*) seraient parallèles. (*EC*) et (*AD*) ne sont donc pas coplanaires. On pouvait démontrer ce résultat d'une autre manière : en disant que *A* est à l'extérieur du plan (*CDE*), donc que (*AD*) ne pouvait pas être coplanaire avec (*EC*).

4) Les plans (*ADE*) et (*ABC*) ont *A* en commun. D'autre part, ils contiennent respectivement les parallèles (*DE*) et (*BC*). D'après le théorème du toit, leur intersection est dont la parallèle commune à ces deux droites passant par *A*.

5) Comme *G* est le centre de gravité de *ACD*, *G* est situé sur sa médiane [*AO*], aux deux tiers à partir de *A*. Mais *O* est aussi le milieu de [*BE*], donc [*AO*] est une médiane du triangle *ABE*. *G*, situé sur cette médiane, aux deux tiers à partir de *A*, en est le centre de gravité.

6) Comme *I* est le milieu de [*AB*], [*EI*] est une autre médiane de *ABE*. Elle passe donc aussi par *G*. Les points *G*, *E* et *I* sont donc alignés.

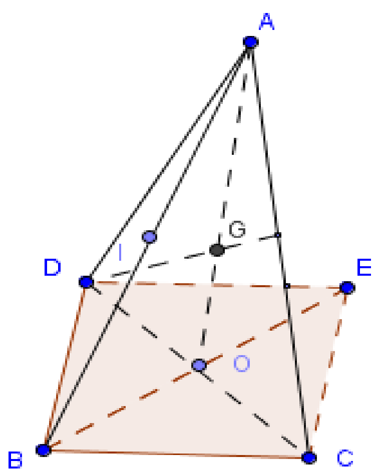


Figure.

Espace

Exercice 4

1) I et J appartiennent à (AIJ) et à (BCD) (I est sur (BC) et J sur (CD)). L'intersection de (AIJ) et (BCD) est donc la droite (IJ).
2) (MN) est une droite de (AIJ). Elle rencontre donc (BCD) sur l'intersection de (AIJ) et (BCD) qui est (IJ). Le point d'intersection de (MN) et (BCD) est donc le point K intersection de (MN) et (IJ).
3) B appartient à (BMN) et (BCD), ainsi que K. L'intersection de (BMN) et (BCD) est donc la droite (BK).

Exercice 5

1) (MN) et (BC) sont parallèles car (MN) est la droite des milieux du triangle SBC. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, (BC) et (AD) sont parallèles. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles, donc (MN) et (AD) sont parallèles.
2) Deux droites parallèles sont coplanaires, donc les points M, N, A, D sont coplanaires, et les droites (AN) et (DM) sont donc coplanaires. P est leur point d'intersection.
3) S appartient aux plans (SAB) et (SDC), ainsi que P (N appartient à (SB) donc à (SAB), donc (AN) est incluse dans (SAB), et de même (DM) est incluse dans (SDC), et P est sur ces deux droites). L'intersection de (SAB) et (SDC) est donc (SP).
4) Les plans sécants (SAB) et (SDC) contiennent les parallèles (AB) et (CD). D'après le théorème du toit, leur intersection est parallèle à ces droites, donc (SP) et (AB) sont parallèles.

Espace

Exercice 6

1) A et I appartiennent à $\mathscr{P}$, donc comme J est sur (AI), J appartient à $\mathscr{P}$. J appartient aussi à (BCD) car il est sur (BC). J appartient donc à l'intersection de $\mathscr{P}$ et (BCD). De plus, $\mathscr{D}$ est parallèle au plan (BCD), donc (BCD) contient une parallèle à $\mathscr{D}$. Les plans $\mathscr{P}$ et (BCD) contiennent des parallèles, donc d'après le théorème du toit, leur intersection est parallèle à ces droites. C'est donc bien la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par J.

2) la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par J et (CD) sont coplanaires dans (BCD). Soit K leur point d'intersection. K appartient à (ACD) mais aussi à $\mathscr{P}$ car la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par J est incluse dans $\mathscr{P}$. Comme A appartient aussi à (ACD) et $\mathscr{P}$, l'intersection de ces plans est donc la droite (AK).

3) $\mathscr{D}$ et (AK) sont coplanaires dans $\mathscr{P}$. Leur point d'intersection appartient à (ACD) car (AK) est incluse dans (ACD). C'est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et (ACD). (1 point)