

Fiche 1 : Les suites arithmétiques

- 1 (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

Dans chacun des cas suivants, calculer u_2 , u_3 , u_7 et u_{11} :

a) $u_0 = 1$ et $r = 3$; b) $u_0 = -4$ et $r = 7$; c) $u_0 = 0$ et $r = 5/4$

d) $u_0 = 8$ et $r = -2$; e) $u_0 = 4$ et $r = 3/2$;

- 2 (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

Calculer r et u_0 :

a) $u_1 = 7$ et $u_{13} = 67$; b) $u_4 = 6$ et $u_{11} = 41$; c) $u_3 = 9$ et $u_{25} = -57$

- 3 (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) ou encore $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

On donne : $u_0 = -11$ et $r = 4$.

Calculer S_{11} , S_{14} et S_{23} .

- 4 (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$

- 5 Calculer la somme des entiers multiples de 15, compris entre 115 et 1150.

6 On pose : $S = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{7}{7} + \frac{9}{7} + \dots + \frac{47}{7} + \frac{49}{7}$.

a) Vérifier que S est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

b) Calculer S en utilisant le résultat de la question précédente.

Fiche 1 : Les suites arithmétiques

1

a) $u_0 = 1$ et $r = 3$

Donc $u_2 = u_0 + 2r = 1 + 2 \times 3 = 7$

$$u_3 = u_0 + 3r = 1 + 3 \times 3 = 10$$

$$u_7 = u_0 + 7r = 1 + 7 \times 3 = 22$$

$$u_{11} = u_0 + 11r = 1 + 11 \times 3 = 34$$

c) $u_0 = 0$ et $r = \frac{5}{4}$

Donc $u_2 = u_0 + 2r = \frac{5}{2}$

$$u_3 = u_0 + 3r = \frac{15}{4}$$

$$u_7 = u_0 + 7r = \frac{35}{4}$$

$$u_{11} = u_0 + 11r = \frac{55}{4}$$

b) $u_0 = -4$ et $r = 7$

Donc $u_2 = u_0 + 2r = 10$

$$u_3 = u_0 + 3r = 17$$

$$u_7 = u_0 + 7r = 45$$

$$u_{11} = u_0 + 11r = 73$$

d) $u_0 = 8$ et $r = -2$

Donc $u_2 = u_0 + 2r = 4$

$$u_3 = u_0 + 3r = 2$$

$$u_7 = u_0 + 7r = -6$$

$$u_{11} = u_0 + 11r = -14$$

e) $u_0 = 4$ et $r = \frac{3}{2}$

Donc $u_2 = u_0 + 2r = 7$

$$u_3 = u_0 + 3r = \frac{17}{2}$$

$$u_7 = u_0 + 7r = \frac{29}{2}$$

$$u_{11} = u_0 + 11r = \frac{41}{2}$$

Fiche 1 : Les suites arithmétiques

2

$$a) u_1 = 7 \text{ et } u_{13} = 67$$

$$\text{Or : } u_1 = u_0 + r = 7$$

$$\text{Et : } u_{13} = u_0 + 13r = 67$$

$$\text{Donc : } 7 - r = 67 - 13r$$

$$\text{On en déduit : } 12r = 60$$

$$\text{Soit : } r = 5$$

$$\text{Puis : } u_0 = u_1 - r = 7 - 5 = 2$$

$$b) u_4 = 6 \text{ et } u_{11} = 41$$

$$\text{Or : } u_4 = u_0 + 4r = 6$$

$$\text{Et : } u_{11} = u_0 + 11r = 41$$

$$\text{Donc : } 6 - 4r = 41 - 11r$$

$$\text{On en déduit : } 7r = 35$$

$$\text{Soit : } r = 5$$

$$\text{Puis : } u_0 = u_4 - 4r = 6 - 20 = -14$$

$$c) u_3 = 9 \text{ et } u_{25} = -57 \quad \text{Or : } u_3 = u_0 + 3r = 9 \quad \text{Et : } u_{25} = u_0 + 25r = -57$$

$$\text{Donc : } 9 - 3r = -57 - 25r \quad \text{On en déduit : } 22r = -66$$

$$\text{Soit : } r = -3 \quad \text{Puis : } u_0 = u_3 - 3r = 9 + 9 = 0$$

3

$$\text{On a : } u_0 = -11, r = 4 \quad \text{et} \quad S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

On a donc besoin de calculer u_{11} , u_{14} et u_{23} :

$$u_{11} = u_0 + 11r = -11 + 11 \times 4 = 33$$

$$u_{14} = u_0 + 14r = -11 + 14 \times 4 = 45$$

$$u_{23} = u_0 + 23r = -11 + 23 \times 4 = 81$$

$$\text{Donc : } S_{11} = \frac{(11+1)(-11 + 33)}{2} = 66$$

$$\text{et } S_{14} = \frac{(14+1)(-11+45)}{2} = 150$$

Fiche 1 : Les suites arithmétiques

- 4 Par hypothèse, (u_n) est une suite arithmétique.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_{n-1} = u_n - r$ et $u_{n+1} = u_n + r$

Puis, en additionnant membre à membre :

$$u_{n-1} + u_{n+1} = (u_n - r) + (u_n + r) \quad \text{équivalent à} \quad u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$$

- 5 $15 \times 7 = 105$ et $15 \times 8 = 120$

Donc le premier multiple de 15 compris entre 115 et 1150 est 120.

On considère alors la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 120$ et de raison 15.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = 120 + 15n$

Les termes de cette suite sont les multiples de 15 supérieurs à 120.

Il faut donc savoir quel est le dernier terme de la suite compris entre 115 et 1150.

$$115 < u_p < 1150 \quad \text{équivalent à} \quad -5 < 15p < 1030 \quad \text{donc} \quad 0 < p < 68$$

$$\text{Calculons alors : } u_{68} = 120 + 15 \times 68 = 1140$$

On en déduit la somme S_{68} des 69 premiers termes de la suite (u_n) :

$$S_{68} = \frac{69(120 + 1140)}{2} = 43\,470$$

Conclusion : La somme des multiples de 15 compris entre 115 et 1150 vaut 43 470.

Fiche 1 : Les suites arithmétiques

6 On a: $S = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{7}{7} + \frac{9}{7} + \dots + \frac{47}{7} + \frac{49}{7}$

a) S est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) .

Le premier terme de cette suite est $u_0 = \frac{1}{7}$ et la raison est $r = \frac{2}{7}$.

b) On a: $S = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{7}{7} + \frac{9}{7} + \dots + \frac{47}{7} + \frac{49}{7}$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{24}$$
$$= \frac{25(u_0 + u_{24})}{2}$$
$$= \frac{625}{7}$$