Factorisations

a) $(x-1)^2 - (4x-4)(x-3)$

b) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^4 - (x+1)^2(x-3)^2$

c) $(2x^2 - 4x + 2)(x-1)$

Résolution d'équations

a) $(6-5x)^2 - 1 = 0$

b) $(3x^2 - 3) + (x^2 - 2x + 1) = 0$

c) $(2x-1)^2 = (4x-2)(4x+2)$

Résolution d'inéquations

a) $\frac{2}{3}x + 3 \geq 2x - 1$

b) $\frac{x-3}{4} \geq \frac{x}{4} - 5$

c) $(x+3)(x+2) \leq (-2x-6)(2x+1)$

d) $2x - \frac{x-1}{5} \geq \frac{1}{4} - x$

e) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \leq \frac{36}{x^2-9}$

Equation et inéquation du second degré**Exercice 1**

Résoudre l'inéquation : $2x^2 + 9x - 5 \leq 0$

Exercice 2

a) Etudier le signe de chacune des fonction f et g définies par :

$$f(x) = x^2 - x + 1 \text{ et } g(x) = 3x - x^2 - 2.$$

b) Résoudre : $(x^2 - x + 1)(3x - x^2 - 2) < 0$

Factorisations

$$a) (x-1)^2 - (4x-4)(x-3) = (x-1)^2 - 4(x-1)(x-3) = (x-1)(x-1-4(x-3)) = (x-1)(-3x+11)$$

$$b) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^4 - (x+1)^2(x-3)^2 = \left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 + (x+1)(x-3)\right] \left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 - (x+1)(x-3)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{9}(x+1)^2 + (x+1)(x-3)\right] \left[\frac{1}{9}(x+1)^2 - (x+1)(x-3)\right]$$

$$= [x+1]^2 \left[\frac{1}{9}(x+1) + x-3\right] \left[\frac{1}{9}(x+1) - x+3\right]$$

$$= [x+1]^2 \left[\frac{10}{9}x - \frac{26}{9}\right] \left[-\frac{8}{9}x + \frac{28}{9}\right]$$

$$c) (2x^2 - 4x + 2)(x-1) = 2(x^2 - 2x + 1)(x-1) = 2(x-1)^3$$

Résolution d'équations

$$a) (6-5x)^2 - 1 = 0 \quad \text{équivalent à} \quad (6-5x+1)(6-5x-1) = 0$$

$$\text{équivalent à} \quad 5(7-5x)(1-x) = 0 \quad \text{équivalent à} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{5}$$

$$b) (3x^2 - 3) + (x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \text{équivalent à} \quad 3(x^2 - 1) + (x-1)^2 = 0$$

$$\text{équivalent à} \quad (x-1)(3(x+1) + (x-1)) = 0 \quad \text{équivalent à} \quad (x-1)(4x+2) = 0$$

$$\text{équivalent à} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$c) (2x-1)^2 = (4x-2)(4x+2) \quad \text{équivalent à} \quad (2x-1)^2 = 4(2x+1)(2x-1)$$

$$\text{équivalent à} \quad (2x-1)(6x+5) = 0 \quad \text{équivalent à} \quad 2x-1=0 \quad \text{ou} \quad 6x+5=0$$

$$\text{équivalent à} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{6}$$

Corrigé

Résolution d'inéquations

$$a) \frac{2}{3}x + 3 \geq 2x - 1 \quad \text{équivaut à} \quad 4 \geq \frac{4}{3}x \quad \text{équivaut à} \quad x \leq 3$$

donc l'ensemble de solution est $]-\infty; 3]$

$$b) \frac{x-3}{4} \geq \frac{x}{4} - 5 \quad \text{équivaut à} \quad x-3 \geq x-20 \quad \text{équivaut à} \quad -3 \geq -20$$

L'inégalité est toujours vérifiée, donc l'ensemble de solution est $\mathbb{R}$.

$$c) (x+3)(x+2) \leq (-2x-6)(2x+1) \quad \text{équivaut à} \quad (x+3)(x+2) \leq -2(x+3)(2x+1)$$

$$\text{équivaut à} \quad (x+3)(5x+4) \leq 0$$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{4}{5}$	$+\infty$	
$x+3$	-	0	+	+	
$5x+4$	-	-	0	+	
$(x+3)(5x+4)$	+	0	-	0	+

$$\text{D'où l'ensemble de solution de l'inéquation est : } S = \left[-3; \frac{4}{5} \right]$$

$$d) 2x - \frac{x-1}{5} \geq \frac{1}{4} - x \quad \text{équivaut à} \quad 40x - 4(x-1) \geq 5 - 20x$$

$$\text{équivaut à} \quad 56x \geq 1 \quad \text{équivaut à} \quad x \geq \frac{1}{56}$$

$$\text{D'où l'ensemble de solution de l'inéquation est : } \left[\frac{1}{56}; +\infty \right[$$

e) Il faut que x soit différent de -3 et de 3.

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \leq \frac{36}{x^2-9} \quad \text{équivaut à} \quad \frac{(x^2-9)(x+3)}{x-3} - \frac{(x^2-9)(x-3)}{x+3} \leq 36$$

$$\text{équivaut à} \quad (x+3)^2 - (x-3)^2 \leq 36$$

$$\text{équivaut à} \quad (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) \leq 36$$

$$\text{équivaut à} \quad 12x \leq 36 \quad \text{équivaut à} \quad x \leq 3$$

$$S \text{ l'ensemble des solutions s'écrit : } S =]-\infty; -3[\cup]-3; 3[$$

Equation et inéquation du second degré**Exercice 1**

le discriminant est : $\Delta = 81 - 4 \times (-5 \times 2) = 121$

les racines sont : $x' = \frac{-9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = \frac{-20}{4} = -5$ et $x'' = \frac{-9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

L'inéquation devient donc : $(x + 5)(2x - 1) \leq 0$

Cela permet de construire le tableau suivant :

x	$-\infty$	-5	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x - 1$	-	0	0	+	
$x + 5$	-	0	-	+	
$(2x - 1)(x + 5)$	+	0	-	0	+

D'où l'ensemble de solution de l'inéquation est : $S = \left[-5; \frac{1}{2} \right]$

Exercice 2

a) Signe de $f(x) = x^2 - x + 1$:

Le discriminant est: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc le signe de $f(x)$ est celui de $a = 1$

Ainsi $f(x) > 0$ partout $x \in \mathbb{R}$

Signe de $g(x) = 3x - x^2 - 2$:

Le discriminant est: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-3 - 1}{2 \times (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + 1}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Cela permet de construire le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
Signe de $g(x)$	-	0	+	0	-

b) Comme pour tout x réel, $f(x) > 0$, alors l'expression $(x^2 - x + 1) \cdot (3x - x^2 - 2) = f(x) \cdot g(x)$

est du signe de $g(x)$. Donc $S =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$