Lycée IBN KHALDOUN - RADES

DEVOIR DE SYNTHESE N° 2

Mr ABIDI Farid

CLASSE : $2^{éme}$ *Sciences 2*

EPREUVE ***MATHEMATIQUES***

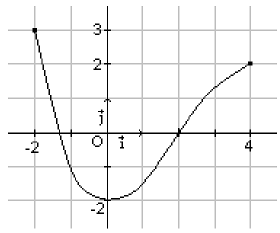
Durée **: *2h***

Date : 05-03-2010

Exercice 1 : (3 points)

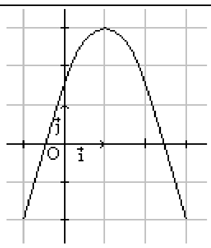
Répondre par Vrai ou Faux à chacune des propositions ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie par la représentation graphique sur la figure ci-contre.



1. f est définie sur [2 ; 4].
2. 0 est un antécédent de 2.

Soit g la fonction définie par la représentation graphique sur la figure ci-contre :



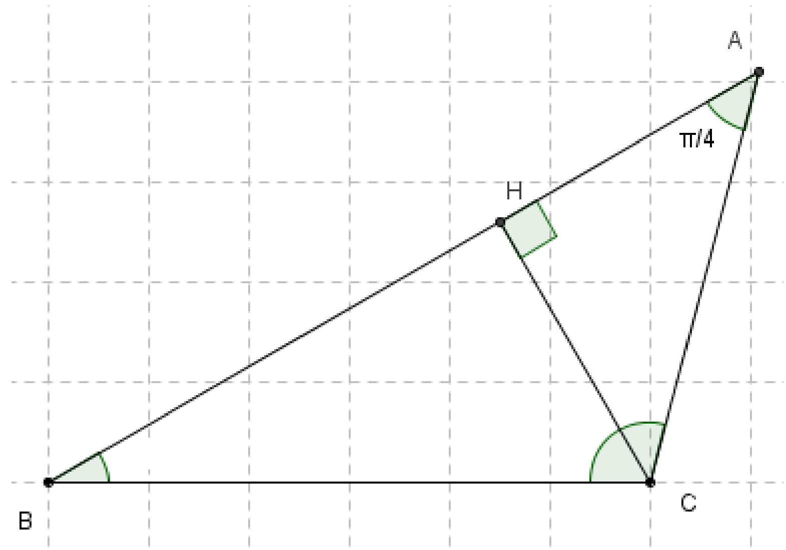
3. g(1,5) < g(2).
4. Si $-1 \le a < b \le 1$ alors $g(a) \ge g(b)$

5. Si h est une fonction paire sur [-5, 5] et est décroissante sur [-5, 0] alors h est croissante sur [0, 5].

6. Si k est une fonction impaire et est définie en 0 alors k(0) = 0.

Exercice 2 : (6 points)

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$, $AC = 3\sqrt{2}$ et $BC = 6$.



1. a) En utilisant la loi des sinus, calculer $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

b) Montrer que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ et calculer $\widehat{ACB}$ (en radian).

2. Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

a) Calculer AH et BH. puis vérifier que $AB = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Montrer en utilisant la loi des sinus que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 : (6 points)

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

1. On donne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = 2 + 5n$.
Déterminer l'entier n pour que $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = 2088$

2. On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Calculer $S = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Deux suites (T_n) arithmétique et (R_n) géométrique sont représentées par les points d'abscisses entières positives ou nulles des courbes ci-dessous.
Préciser quelle courbe représente quelle suite (Justifier).
Les utiliser pour déterminer les quatre premiers termes et la raison de chaque suite.

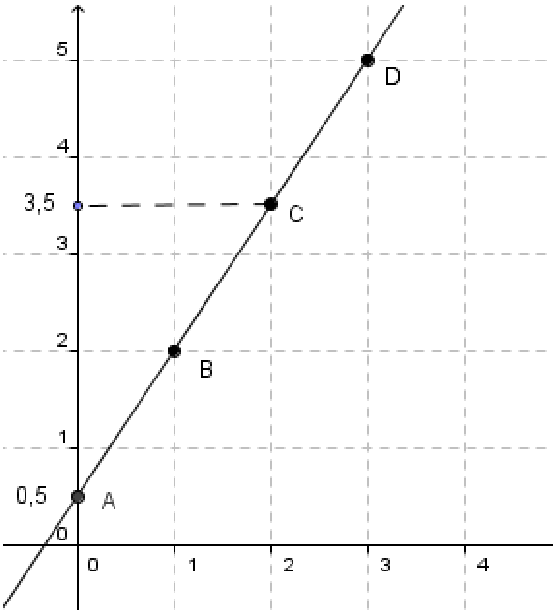


Figure 1

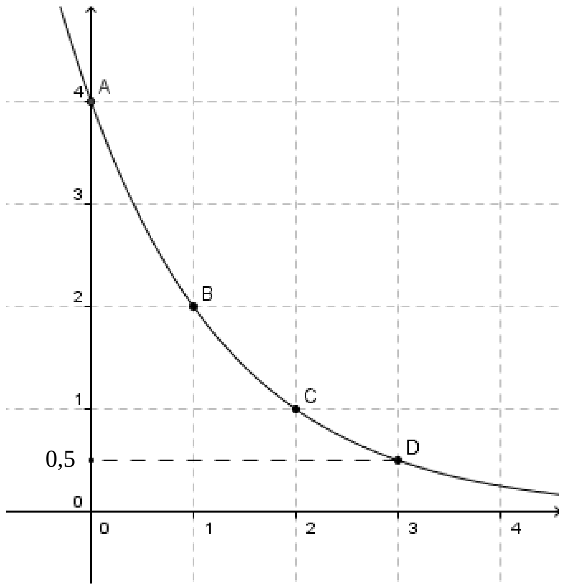


Figure 2

Exercice 4 : (5 points)

Soit un carré ABCD de centre O , de sens direct tel que AB = 4. On désigne par I le symétrique de A par rapport à B et on appelle r la rotation directe de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. a) Montrer que r(A) = B et r(B) = C.
   b) Construire le point J image de I par r.
   c) Montrer que C est le milieu de [BJ].
2. Déterminer la nature du triangle BDJ.
3. Soit M un point du segment [AB]. La perpendiculaire à la droite (MD) passant par A coupe (BC) en N.
   a) Déterminer l'image de la droite (MD) par r.
   b) En déduire que r(M) = N et AM = BN.
   c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points N lorsque M décrit [AB].

CORRIGE

Exercice 1 :

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai ; 6. Vrai

Exercice 2 :

1. a) $\dfrac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{AC}=\dfrac{\sin\left(\widehat{BAC}\right)}{BC}$ équivaut à $\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{\sin\left(\widehat{BAC}\right)}{BC}\times AC$

d'où $\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{6}\times 3\sqrt{2}$. On conlue : $\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{6}\times 3\sqrt{2}$.

b) $\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{1}{2}$ équivaut à $ABC=\dfrac{\pi}{6}$ ou $ABC=\dfrac{5\pi}{6}$.

Or $\widehat{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\widehat{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$.

$\widehat{ACB}=\pi-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BAC}\right)=\pi-\dfrac{5\pi}{12}$, il en suit : $\widehat{ACB}=\dfrac{7\pi}{12}$

2. a) Dans le triangle ACH rectangle en H , on a: $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{AH}{AC}$ équivant à $AH=AC\times\cos\dfrac{\pi}{4}$.

D'où $AH=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$.

Dans le triangle ABH rectangle en H , on a: $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{BH}{BC}$ équivant à $BH=BC\times\cos\dfrac{\pi}{6}$.

D'où $BH=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

H est un point du segment [AB] donc AB = AH + BH = $3+3\sqrt{3}$ et par conséquent AB = $3\left(1+\sqrt{3}\right)$.

b) L'aire $\mathcal{A}$ du traingle ABC est donnée par exemple par la formule

$\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}BA\times BC\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\times 3\left(1+\sqrt{3}\right)\times 6\times\dfrac{1}{2}$ d'où $\mathcal{A}=\dfrac{9}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

c) $\dfrac{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}{AB}=\dfrac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{AC}$ équivaut à $\sin\left(ACB\right)=\dfrac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{AC}\times AB$

équivaut à $\sin\left(\widehat{ACB}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{3\sqrt{2}}\times 3\left(1+\sqrt{3}\right)$ équivaut à $\sin\left(\widehat{ACB}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

D'où $\sin\left(\widehat{ACB}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

De $\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{12}>0$, on en déduit : $\dfrac{7\pi}{12}>\dfrac{\pi}{2}$ et par conséquent $\cos\left(\widehat{ACB}\right)<0$.

Ainsi $\cos\left(\widehat{ACB}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\widehat{ACB}\right)}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2}=-\sqrt{1-\dfrac{8+4\sqrt{3}}{16}}=-\sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}}$

$$= -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 3 :

1. Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n = 2+5(n+1)-2-5n = 5$ donc la suite (U_n) est arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison 5.

Il en résulte : $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = 2088$ équivaut à $(n+1)\frac{(U_0+U_n)}{2} = 2088$

équivaut à $(n+1)\frac{(4+5n)}{2} = 2088$ équivaut à $5n^2 + 9n - 4172 = 0$.

Résolvons alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^2 + 9x - 4172 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = 81 + 83440 = 83521 = 289^2$.

Les racines de cette équation sont : $x_1 = \frac{-9-289}{10} = -\frac{145}{5}$ et $x_1 = \frac{-9+289}{10} = 28$.

Ainsi, pour n = 28 , on a : $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = 2088$.

2. On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{1}{3^{n+1}}$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} = \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{3 \times 3^{n+2}} = \frac{1}{3}V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison q = $\frac{1}{3}$.

b) $S = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V_0 \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3^6-1}{3^6} = \frac{728}{1458} = \frac{364}{729}$.

3. La courbe de la figure (1) représente la suite arithmétique (T_n).

La courbe de la figure (2) représente la suite géométrique (R_n).

	de la suite (T_n)	de la suite (R_n)
Les quatre premiers termes	$T_0 = 0,5; T_1 = 2; T_2 = 3,5; T_3 = 5$	$T_0 = 0,5; T_1 = 2; T_2 = 3,5; T_3 = 5$
La raison	$r = T_1 - T_0 = 1,5$	$q = \frac{R_1}{R_0} = 0,5$

Exercice 4 :

1. a) On a : OA = OB et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$ (direct) donc r(A) = B.

Et OB = OC et $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{2}$ (direct) donc r(B) = C.

b) I est le symétrique de A par rapport à B donc B est milieu de [AI]

donc r(B) = C est milieu de r([AI]) =[BJ] d'où J est le symétrique de B par rapport à C.

2. J est le symétrique de B par rapport à C donc BC = BJ et $\widehat{CDJ}=\widehat{BDC}=\frac{\pi}{4}$ donc

$\widehat{BDJ}=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ donc le triangle $\widehat{BDJ}$ est isocèle et rectangle en D.

3. a) Comme l'angle de r est $\frac{\pi}{2}$ alors l'image de la droite (MD) est la perpendiculaire à la droite (MD) passant par r(D) = A. Or (AN) est la perpendiculaire passant par A à la droite (MD). On conclue r((MD)) = (AN).

b) M est le point d'intersection des droites (AB) et (MD) donc r(M) est le point d'intersection des droites (BC) et (AN) d'où r(M) = N.

On a : r(A) = B et r(M) = N donc AM = BN.

c) M décrit le segment [AB] donc r(M) = N décrit $\Gamma=r\left(\left[AB\right]\right)=\left[BC\right]$.