

❖❖❖  
**DEVOIR DE SYNTHESE N° 1**

EPREUVE **MATHEMATIQUES**

❖❖❖  
Mr ABIDI Farid

Durée : 2h

Date : 11-12-2009

**Exercice 1 : (3 points)**

Répondre par « Vrai » ou « Faux » aux propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

- L'équation  $-x^2 + 2009x + 10^{10} = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$  vérifiant  $x_1 + x_2 = 2009$
- Pour tout  $x$  réel,  $-2x^2 + 3x - 4 \geq 0$ .
- $(-2)$  est un zéro du polynôme  $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 10$ .
- $A$  étant un chiffre. Alors le nombre  $1a23a0748$  est divisible par 11.
- Si le nombre  $341 \bullet$  est divisible par 2 et 4 alors le chiffre  $\bullet$  est 6.
- Soit  $a$  et  $b$  deux chiffres. Alors le nombre  $1100a + 1925b$  est divisible par 11 et 25.

**Exercice 2: (5 points)**

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2x^2 + 5x + 3 = 0$ .
  - Factoriser alors  $2x^2 + 5x + 3$  sous la forme  $(ax+b)(x+c)$ .
- Soit  $f$  la fonction à variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \frac{4}{2x^2 + 5x + 3} + \frac{x+5}{2x+3}$ .
  - Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
  - Etudier le signe de  $f(x)$ .
  - Résoudre l'inéquation  $f(x) > 0$ .

**Exercice 3 : (5 points)**

$n$  désigne un entier naturel. On pose  $a = 2n + 1$  et  $b = n + 3$ .

- Calculer  $2b - a$ .
  - Montrer que dans  $\mathbb{N}$  : si  $d$  divise  $a$  et  $b$  alors  $d = 1$  ou  $d = 5$ .
- Montrer que si 5 divise  $a$  et  $b$  alors 5 divise  $n - 2$ .
  - Démontrer que si 5 divise  $n - 2$  alors 5 divise  $a$  et  $b$ .
- Déterminer alors toutes les valeurs de  $n$  pour lesquelles 5 divise  $a$  et  $b$ .

**Exercice 4 : ( 7 points)**

Soit OAB un triangle équilatéral et  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre O et passant par A . On désigne par I

le point défini par  $\vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ .

1. a) Montrer que I est la barycentre des pondérés  $(A, 1)$  et  $(B, -3)$ . Faire une figure.

b) Déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M tels que  $\vec{MA} - 3\vec{MB}$  soit colinéaire au vecteur  $\vec{BO}$ .

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que

$$2\vec{MM'} = \vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MO}.$$

a) Montrer que f est la translation de vecteur  $\vec{IO}$ .

b) Construire  $O' = f(O)$  puis  $(\mathcal{C}')$  est l'image de  $(\mathcal{C})$  par f.

3. Soit  $(\Delta)$  la parallèle à la droite (AB) passant par O.  $(\Delta)$  coupe  $(\mathcal{C}')$  en D et E tel que  $D \in [OE]$ .

a) Montrer que  $f((AB)) = \Delta$ .

b) Montrer que  $f(B) = D$  et  $f(A) = E$ .

c) On appelle H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) et H' le projeté orthogonal de O' sur la droite (DE).

Montrer que  $OH = O'H'$ .

**Correction****Exercice 1 :**

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Vrai ; 6. Vrai

**Exercice 2:**

1. a) Résolvons dans
- $\mathbb{R}$
- l'équation
- $2x^2 + 5x + 3 = 0$
- :

On a :  $2 - 5 + 3 = 0$  donc les racines sont :  $-1$  et  $-\frac{3}{2}$ .

- b) Pour tout
- $x$
- réel,
- $2x^2 + 5x + 3 = 2(x+1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)(2x+3)$
- .

2. Soit
- $f$
- la fonction à variable réelle
- $x$
- définie par
- $f(x) = \frac{4}{2x^2 + 5x + 3} + \frac{x+5}{2x+3}$
- .

- a)
- $f(x)$
- existe
- $\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 \neq 0$
- et
- $2x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$
- et
- $x \neq -\frac{3}{2}$
- .

Donc l'ensemble de définition de  $f$  est  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$ .

- b) Réduisons
- $f(x)$
- au même dénominateur. Le dénominateur commun de
- $f(x)$

$$2x^2 + 5x + 3 = (x+1)(2x+3).$$

Il en résulte que pour tout  $x$  de  $D$ ,

$$f(x) = \frac{4}{(x+1)(2x+3)} + \frac{x+5}{2x+3} = \frac{4 + (x+1)(x+5)}{(x+1)(2x+3)} = \frac{x^2 + 6x + 9}{(x+1)(2x+3)} = \frac{(x+3)^2}{(x+1)(2x+3)}.$$

Dressons le tableau de signe de  $f(x)$  :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-\frac{3}{2}$	$-1$	$+\infty$
$(x+3)^2$		+	0	+	
$2x^2 + 5x + 3$		+		+	
$f(x)$		+	0	+	

- c) L'ensemble de solutions de l'inéquation
- $f(x) > 0$
- est
- $]-\infty, -3[ \cup ]-\frac{3}{2}, -1[ \cup ]-1, +\infty[$
- .

**Exercice 3 :**

1. a)  $2b - a = 2(n+3) - (2n+1) = 2n+6 - 2n-1 = 5.$

b) Si  $d$  divise  $a$  et  $b$  alors  $d$  divise  $(-1)a + 2b = 2b - a = 5$ . Or les seuls diviseurs de 5 sont 1 et 5. Par conséquent  $d = 1$  et  $d = 5$ .

2. a) si 5 divise  $a$  et  $b$  alors 5 divise  $a - b = n - 2$ .

b) 5 divise  $n - 2$  équivaut à il existe un entier  $q$  tel que  $n - 2 = 5q$  d'où  $n = 5q + 2$ .

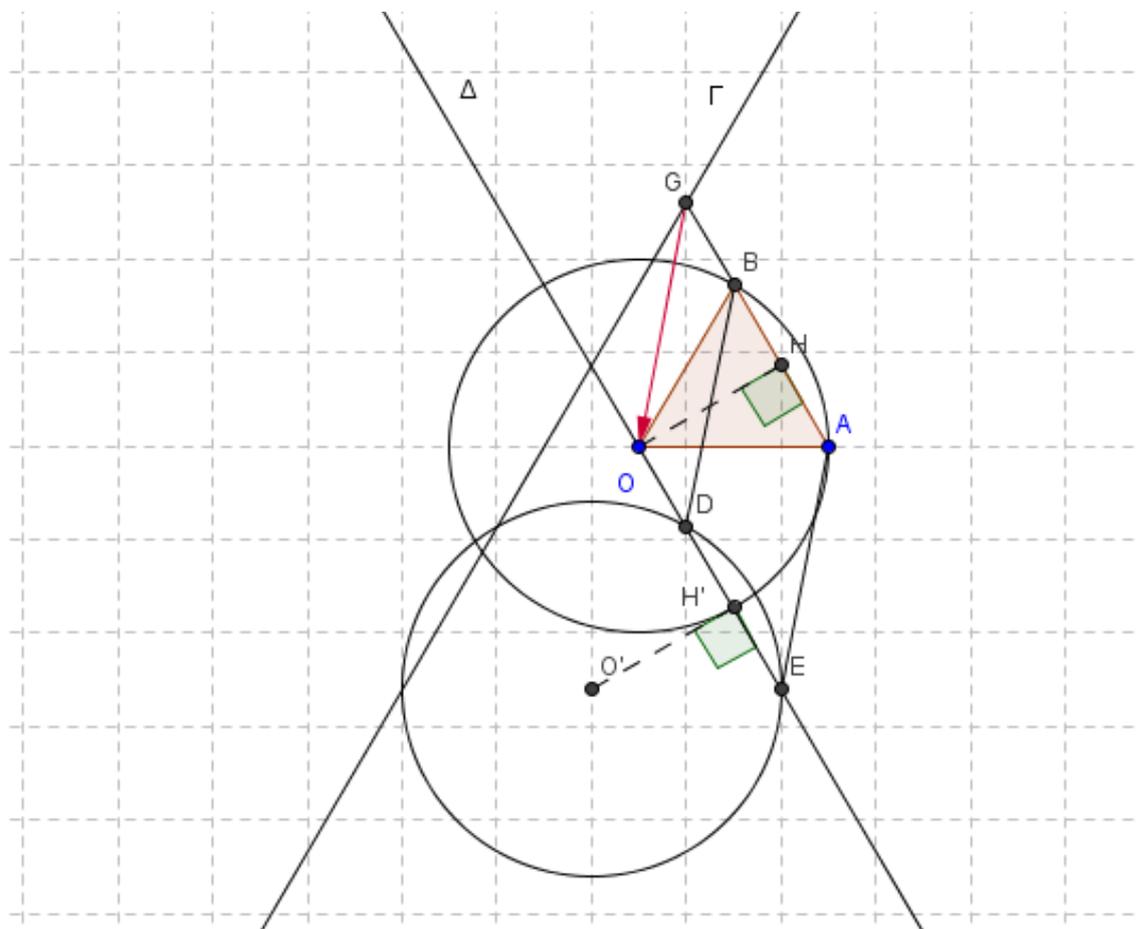
Or  $a = 2n + 1 = 2(5q + 2) + 1 = 10q + 5 = 5(2q + 1)$  donc 5 divise  $a$ .

De plus  $b = n + 3 = (5q + 2) + 3 = 5q + 5 = 5(q + 1)$  donc 5 divise  $b$ .

3. 5 divise  $a$  et  $b$  équivaut à 5 divise  $n - 2$  équivaut à il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 5q + 2$ .

Ainsi, les valeurs de  $n$  pour lesquelles 5 divise  $a$  et  $b$  sont :

$5 \times 0 + 2 = 2, 5 \times 1 + 2 = 7, 5 \times 2 + 2 = 12, 5 \times 3 + 2 = 17, \dots$

**Exercice 4 :**

$$1. a) \vec{AG} = \frac{3}{2} \vec{AB} \text{ équivaut à } 2\vec{AG} = 3\vec{AB} \text{ équivaut à } 2\vec{AG} = 3\vec{AG} + 3\vec{GB} \text{ équivaut à } \vec{AG} + 3\vec{GB} = \vec{0}$$

équivaut à  $-\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$  ou encore  $\vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0}$ . Par conséquent, G est la barycentre des pondérés (A, 1) et (B, -3).

b) On sait que pour tout point M du plan,  $\vec{MA} - 3\vec{MB} = -2\vec{MG}$ .

D'autre part,  $\vec{MA} - 3\vec{MB}$  est colinéaire à  $\vec{BO}$  équivaut à  $-2\vec{MG}$  est colinéaire à  $\vec{BO}$ .

Il en résulte que l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M tels que  $\vec{MA} - 3\vec{MB}$  soit colinéaire au vecteur  $\vec{BO}$  est la parallèle à la droite (BO) passant par G.

4. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que

$$2\vec{MM}' = \vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MO}.$$

$$a) 2\vec{MM}' = \vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MO} = -2\vec{MG} + 2\vec{MO} = 2 \left( \vec{GM} + \vec{MO} \right) = 2\vec{GO}. \text{ D'où } \vec{MM}' = \vec{GO}.$$

Par suite, f est la translation de vecteur  $\vec{GO}$ .

b)  $O' = f(O)$  équivaut à  $\vec{OO}' = \vec{GO}$  ou encore  $O'$  est le symétrique de G par rapport à O.  
 $(\mathcal{C}') = f(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  $O'$  et de même rayon que le cercle  $(\mathcal{C})$ .

5. ( $\Delta$ ) la parallèle à la droite (AB) passant par O coupe  $(\mathcal{C})$  en D et E tel que  $D \in [OE]$ .

a)  $f((AB))$  est la parallèle à la droite (AB) passant par  $f(G) = O$  donc  $f((AB)) = \Delta$ .

b) On sait que la droite (AB) coupe le cercle en A et B donc  $f((AB)) = \Delta$  coupe le cercle  $(\mathcal{C})$  en  $f(A)$  et  $f(B)$ . Comme  $G \in [AG]$  alors  $f(G) \in f([AG]) = [f(A)O]$ .

Par suite,  $f(B) = D$  et  $f(A) = E$ .

c) On appelle H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) et  $H'$  le projeté orthogonal de  $O'$  sur la droite (DE).

Posons  $f(H) = H''$ ,

(OH) est la perpendiculaire à la droite (AB) en H donc  $f((OH)) = (O'H'')$  est la perpendiculaire à ( $\Delta$ ) en  $f(H) = H''$ . Or  $(O'H')$  est la perpendiculaire à la droite ( $\Delta$ ) en  $H'$ , par conséquent,  $H'' = H'$ .

On a ainsi :  $f(O) = O'$  et  $f(H) = H'$  donc  $OH = O'H'$ .