

Exercice 1 (4,5 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Les solutions de l'équation $3x^2 + x - 4 = 0$ sont :

- a) -1 et $-\frac{4}{3}$; b) 1 et $-\frac{4}{3}$; c) 1 et $\frac{4}{3}$

2. Si a et b sont deux réels tels que : $a + b = 1$ et $a.b = -6$ alors a et b sont solutions de l'équation :

- a) $x^2 - x - 6 = 0$; b) $x^2 + x - 6 = 0$; c) $x^2 + x + 6 = 0$

3. Si le signe d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est donné par le tableau ci-dessous alors :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c = 0$	-	0	+	0	-

- a) $a > 0$; b) $c > 0$; c) $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

EXERCICE 2 (5,5 points)

1. Soit l'équation (E) : $x^2 - 2x\sqrt{5} - 8 = 0$

a) Sans calculer le discriminant, montrer que l'équation (E) admet deux racines distinctes.

b) Sans calculer les racines x' et x'' de l'équation (E), calculer les expressions suivantes:

$$A = (2x' + 1)(2x'' + 1) \quad \text{et} \quad B = x'^2 + x''^2.$$

2. a) Développer et simplifier $(2\sqrt{2} + 1)^2$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + x - 2 - \sqrt{2} \leq 0$.

EXERCICE 3 (10 points)

L'unité de longueur étant le centimètre.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$. On note I le milieu du segment

[AB] et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

1. Soit L le point défini par $\overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

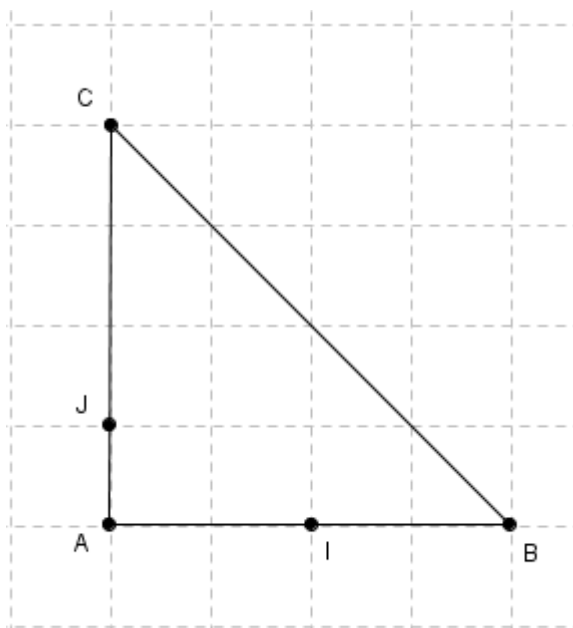
- a) Montrer que $\overrightarrow{CL} = 2\overrightarrow{CJ}$.
b) Placer le point L sur la figure.

2. On rapporte le plan au repère $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$.

Déterminer les coordonnées des points A, I, J, B, C et L.

3. Pour tout réel a non nul, on considère le point M de coordonnées $(2 - 2a, a)$.

- a) Montrer que pour tout a réel non nul, les points I, J et M sont alignés.
b) Déterminer la valeur de a pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont orthogonaux. Placer M pour la valeur de a trouvée.



Corrigé**Exercice 1 :**

1.b) ; 2.a) ; 3.b)

Exercice 2 :1.a) On a : $a = 1$, $b = -2\sqrt{5}$ et $c = -8$ donc a et c sont de signe contraires.D'où l'équation $x^2 - 2x\sqrt{5} - 8 = 0$ admet deux racines.b) Appelons x' et x'' les racines de l'équation $x^2 - 2x\sqrt{5} - 8 = 0$.On a donc : $x' + x'' = -2\sqrt{5}$ et $x'x'' = -8$

$$A = (2x' + 1)(2x'' + 1) = 4x'x'' + 2(x' + x'') + 1 = 4(-8) + 2(-2\sqrt{5}) + 1 = -4\sqrt{5} - 31.$$

$$B = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = (-2\sqrt{5})^2 - 2(-8) = 20 + 16 = 36.$$

$$2.a) (2\sqrt{2} + 1)^2 = 8 + 4\sqrt{2} + 1 = 9 + 4\sqrt{2}.$$

b) Le discriminant du trinôme $x^2 + x - 2 - \sqrt{2}$ est $\Delta = 1 - 4(-2 - \sqrt{2}) = 1 + 8 + 4\sqrt{2} = 9 + 4\sqrt{2}$.On en déduit que $\Delta = (2\sqrt{2} + 1)^2$ et qu'une racine de Δ est $(2\sqrt{2} + 1)$.Les racines de l'équation $x^2 + x - 2 - \sqrt{2} = 0$ sont donc :

$$x_1 = \frac{-1 - (2\sqrt{2} + 1)}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + (2\sqrt{2} + 1)}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Le signe du trinôme $x^2 + x - 2 - \sqrt{2}$ est donné par le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2+x-2-\sqrt{2}$	+	0	-	0	+

Par suite, l'ensemble de solution de l'inéquation $x^2 + x - 2 - \sqrt{2} \leq 0$ est $[-1 - \sqrt{2}; \sqrt{2}]$.**Exercice 3 :**

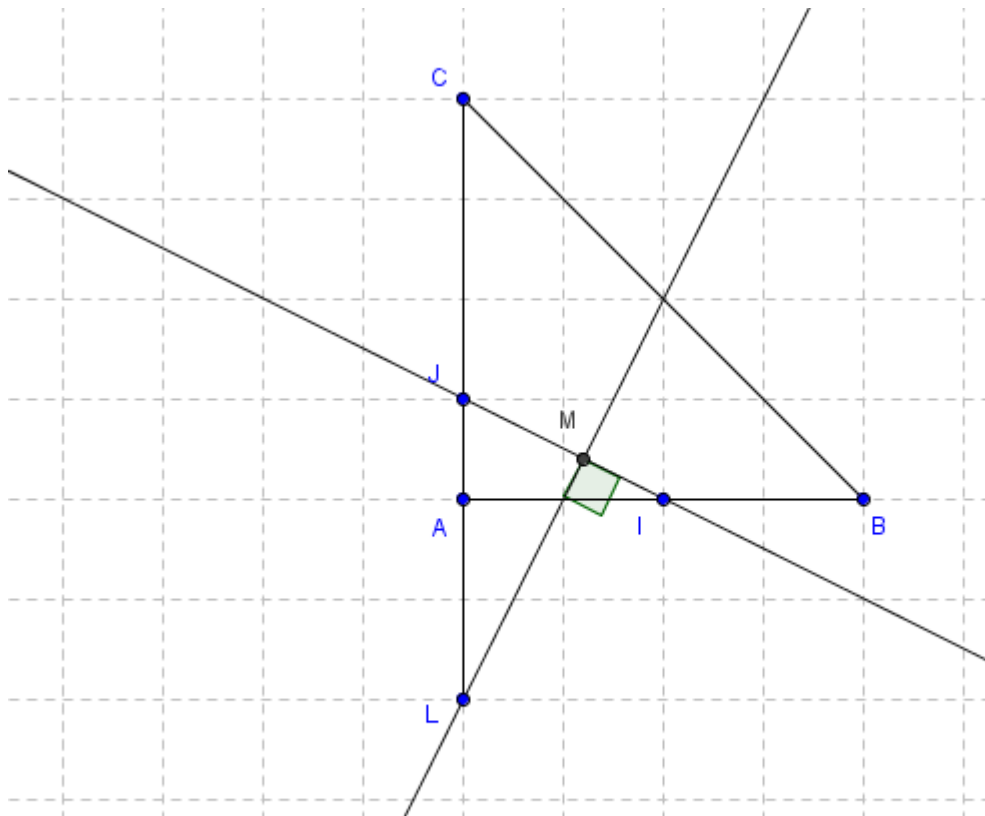
$$1.a) \text{ On a : } \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \text{ donc } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \text{ donc } \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CJ} \text{ ou encore } \overrightarrow{CA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CJ}. \text{ Il en résulte que : } \overrightarrow{CL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{CJ}\right) = 2\overrightarrow{CJ}.$$

b) Voir figure

Corrigé



2. Dans le repère $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$: $A(0, 0)$, $I(2, 0)$, $J(0, 1)$, $B(4, 0)$ et $C(0, 4)$.

Comme $\overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2} \cdot 4\overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{AJ}$, alors $L(0, -2)$.

3. a) On a $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} 2-2a-2 \\ a-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} -2a \\ a \end{pmatrix}$.

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IM}$ est $\begin{vmatrix} -2 & -2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = -2 \times a - 1 \times (-2a) = 2a - 2a = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires d'où les points I, J et M sont alignés.

b) On a $\overrightarrow{MI} \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 0-(2-2a) \\ -2-a \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 2a-2 \\ -a-2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{ML}$ équivaut à $2a \times (2a-2) + (-a) \times (-a-2) = 0$

$$\text{équivaut à } 4a^2 - 4a + a^2 + 2a = 0$$

$$\text{équivaut à } 5a^2 - 2a = 0$$

$$\text{équivaut à } a(5a-2) = 0$$

$$\text{équivaut à } a = 0 \text{ ou } a = \frac{2}{5}$$

Or $a \neq 0$, donc $a = \frac{2}{5}$.