Exercice 1 : (3 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux propositions suivantes :

1. Si A, B , C et D sont quatre points du plan vérifiant $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ alors :
   a) $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=B$; b) $t_{\overrightarrow{AB}}(C)=D$; c) $t_{\overrightarrow{AB}}(D)=C$.
2. Si ABCD est un parallélogramme alors :

   a) $t_{\overrightarrow{AC}}\left((AD)\right)=(BC)$; b) $t_{\overrightarrow{AC}}\left((AB)\right)=(BC)$; $t_{\overrightarrow{BD}}\left((CD)\right)=(AC)$.

3. Le degré du polynôme P(x) = $\left(x^2+3\right)\left(2x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\left(2x^2+7\right)$ est :

   a) 4 ; b) 2 ; c) 0

Exercice 2 : (8 points)

On considère le polynôme f(x)= $2x^3+5x^2-4x-3$.

1. a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x réel , $f(x)=\left(x-1\right)\left(ax^2+bx+c\right)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation f(x) = 0.
2. On pose $g(x)=\dfrac{P(x)}{5x^2+x-6}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction g.

   b) Simplifier l'expression de f(x) pour tout x de D.

   c) Résoudre dans D l'inéquation $f(x)\le 0$.

Exercice 3 : (9 points)

Soit ABC un triangle Isocèle de sommet principal A . On note O le milieu du segment [BC] et I le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, 1). Soit K le barycentre des points pondérés (A, 3) ,

(B, 1) et (C, -1).

1. a) Construire I.
   b) Montrer que les points I, K et C sont alignés puis construire K.

   c) Montrer que $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

2. Soit t l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $3\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

   a) Déterminer l'image du point A par t.

   b) Montrer que t est la translation de vecteur $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

   c) Construire C' image de C par t.

Correction

Exercice 1 :

1. a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai.
   Car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux.
   Car l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle
3. a) Faux ; b) faux ; c) Vrai.

En effet :

pour tout x réel , $P(x) = \left(x^2+3\right)\left(2x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\left(2x^2+7\right)$

$$= 2x^4+5x^2-3-\left(2x^4+5x^2-7\right)$$

$$= 4$$

Exercice 2 :

1. a) Pour tout x réel ,
   $f(x) = (x-1)\left(ax^2+bx+c\right) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

   Or f(x)= $2x^3+5x^2-4x-3$ donc

   $$\begin{cases} a = 2 \\ b-a = 5 \\ c-b = -4 \\ -c = -3 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \\ c = 3 \end{cases}$$

   b) L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $(x-1)\left(2x^2+7x+3\right) = 0$ d'où $x = 1$ ou $2x^2+7x+3 = 0$.

   Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2+7x+3 = 0$:
   son discriminant $\Delta = 49-24 = 25$

   les solutions de l'équation $2x^2+7x+3 = 0$ sont $x_1 = \dfrac{-7-5}{4} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-7+5}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

   Par suite, l'ensemble de solutions de l'équation f(x) =0 est $\left\{-3, -\dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

2. a) g(x) existe équivaut à $5x^2+x-6 = 0$ équivaut à x = 1 ou x = $-\dfrac{6}{5}$.

   Il en résulte que l'ensemble d e définition D de la fonction g est $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{6}{5}, 1\right\}$.

b) Pour tout x D , $g(x)=\dfrac{P(x)}{5x^2+x-6}=\dfrac{(x-1)\left(2x^2+7x+3\right)}{5(x-1)\left(x+\dfrac{6}{5}\right)}=\dfrac{2x^2+7x+3}{5x+6}$

c) Dressons un tableau de signe de g(x) :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{6}{5}$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+7x+3$		+	0	-		-	0	+		+	
$5x+6$		-		-	0	+		+		+	
g(x)		-	0	+	‖	-	0	+	‖	+	

L'ensemble de solutions de l'inéquation $g(x)\leq 0$ est $\left]-\infty,-3\right]\cup\left]-\frac{6}{5},-\frac{1}{2}\right]$.

Exercice 3 :

1. a) I le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, 1) équivaut à $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

   équivaut à $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

   b) K le barycentre de (A, 3) , (B,1) et (C, -1) équivaut à $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

   équivaut à $3\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

   équivaut à $4\overrightarrow{KI}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Ainsi les points I, K et C sont alignés.

   c) $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

   équivaut à $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

   équivaut à $3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}$

   équivaut à $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

2. a) Si M = A et A' = t(A) alors $3\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ équivaut $3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

   équivaut à $3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

   Or $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ donc A' = K.

b) $3\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Par conséquent t est la translation de vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

c) C' = t(C) équivaut à $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

C' appartient donc à la droite (BC) et à la parallèle à droite (AC) passant par K.