Inéquations

1. Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue

Méthode

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue :

- On regroupe les termes contenant l'inconnue x dans le premier membre de l'inéquation pour se ramener à une inéquation du type : $ax \leq b$ (ou $ax < b$) ; $ax \geq b$ (ou $ax > b$) .
- Si $a \neq 0$, on divise les deux membres par a en appliquant la règle suivante :
  – Si $a > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas.
  – Si $a < 0$, le sens de l'inégalité change.
- Si $a = 0$, deux cas sont possibles :
  – Soit l'inéquation n'a pas de solution.
  – Soit tout réel est solution.

Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$:

- $2x-4(x+2) \leq x-5$ équivaut à $2x-4(x+2) \leq x-5$ équivaut à $2x-4x-8 \leq x-5$

équivaut à $2x-4x-x \leq -5+8$ équivaut à $-3x \leq 3$ équivaut à $x \geq -1$

Donc $S = [-1; +\infty[$

- $\dfrac{7x+1}{6} > \dfrac{3x-1}{4}$.

$\dfrac{7x+1}{6} > \dfrac{3x-1}{4}$ équivaut à $\dfrac{14x+2}{12} > \dfrac{9x-3}{12}$ équivaut à $14x+2 > 9x-3$

équivaut à $14x-9x > -2-3$ équivaut à $5x > -5$ équivaut à $x > -1$

Donc $S =]-1; +\infty[$

Inéquations

▸ $3(x-1)+x \leq 4x-5$ équivaut à $3x-3+x \leq 4x-5$ équivaut à $3x+x-4x \leq -5+3$

équivaut à $0x \leq -2$

Comme $0 > 2$, alors $S = \varnothing$

▸ $2(x-1)+x > 3x-5$ équivaut à $2x-2+x > 3x-5$ équivaut à $2x+x-3x > 2-5$

équivaut à $0x > -3$

Comme $0 > -3$, alors $S = \mathbb{R}$

2. Étudier le signe d'un produit ou d'un quotient

Méthodes

▸ Pour trouver le signe d'un produit, on peut chercher le signe de chaque facteur, puis appliquer la règle des signes.

▸ Pour trouver le signe d'un quotient, on peut chercher le signe du numérateur et le signe du dénominateur, puis procéder comme pour le signe d'un produit (le signe de $\frac{A}{B}$ est le même que le signe de $A \times B$).

Exemples

▸ Etudions le signe de $(x+1)(2x-3)$ suivant les valeurs du réel x.

On reporte les résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de (x+1)		–	0	+		+	
Signe de $(2x-3)$		–		–	0	+	
Signe du produit		+	0	–	0	+	

Inéquations

▸ Etudions le signe de $\frac{1-3x}{x+4}$ suivant les valeurs du réel x.

Le quotient est défini pour $x+4 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -4$.

Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $1-3x$		+		+	0	–	
Signe de $x+4$		–	0	+		+	
Signe du quotient		–	‖	+	0	–	

3. Résoudre une inéquation à une inconnue de degré supérieur à un

Méthodes

▸ Regrouper tous les termes dans l'un des membres de manière à faire apparaître 0 dans l'autre membre.

▸ Factoriser le membre non nul.

▸ Etudier le signe du produit obtenu.

▸ Conclure en donnant l'ensemble des solutions.

Exemples

▸ Résolvons dans $\mathbb{R}$ $x^2 \leq 16$.

Remarquons que : $x^2 - 16 \leq 0$ équivaut à $(x+4)(x-4) \leq 0$

Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $x+4$		–	0	+		+	
Signe de $x-4$		–		–	0	+	
Signe du produit		+	0	–	0	+	

Donc $S = [-4; 4]$

Inéquations

▸ Résolvons dans $\mathbb{R}$ $(x-4)(2x+3) > (x-4)(x+1)$.

$(x-4)(2x+3) > (x-4)(x+1)$ équivaut à $(x-4)(2x+3)-(x-4)(x+1) > 0$

équivaut à $(x-4)[(2x+3)-(x+1)] > 0$ équivaut à $(x-4)(2x+3-x-1) > 0$

équivaut à $(x-4)(x+2) > 0$

Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]4; +\infty[$

4. Résoudre une inéquation comportant une inconnue au dénominateur

Méthodes

- ▸ Déterminer les contraintes de l'inéquation.
- ▸ Ramener l'inéquation à la forme $\frac{N}{D} \leq 0$ ou $\frac{N}{D} < 0$ ou $\frac{N}{D} \geq 0$ ou $\frac{N}{D} > 0$.
- ▸ Factoriser N et D si nécessaire.
- ▸ Etudier le signe du quotient $\frac{N}{D}$.
- ▸ Conclure en donnant l'ensemble des solutions.

Exemples

▸ Résolvons dans $\mathbb{R}$ $\frac{x-3}{x+2} \leq 3$.

Cette inéquation est définie pour $x+2 \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq -2$.

$\frac{x-3}{x+2} - 3 \leq 0$ équivaut à $\frac{x-3}{x+2} - \frac{3(x+2)}{x+2} \leq 0$ équivaut à $\frac{x-3-3x-6}{x+2} \leq 0$

équivaut à $\frac{-2x-9}{x+2} \leq 0$

Inéquations

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		-2		$+\infty$
$-2x-9$		$+$	0	$-$	$\mid$	$-$	
$x+2$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc $S =]-\infty; -\frac{9}{2}] \cup]-2;+\infty[$

- $\dfrac{4}{x-1} \leq x-1.$

Cette inéquation est définie pour $x-1 \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq 1$.

$\dfrac{4}{x-1} \leq x-1$ équivaut à $\dfrac{4}{x-1} - (x-1) \leq 0$ équivaut à $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{(x-1)^2}{x-1} \leq 0$

équivaut à $\dfrac{4-(x-1)^2}{x-1} \leq 0$ équivaut à $\dfrac{[2+(x-1)][2-(x-1)]}{x-1} \leq 0$

équivaut à $\dfrac{(x+1)(-x+3)}{x-1} \leq 0$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$-x+3$		$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
Quotient		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $S = [-1; 1[\cup [3; +\infty[$