1 Rappels

Evénement nul-événement certain

- $\oslash$ est appelé événement impossible : $p(\oslash) = 0$
- Ω est appelé événement certain : $p(\Omega) = 1$

Dans le cas d'une loi équiprobable (la probabilité des événements élémentaires est la même), la probabilité d'un événement A est :

$p(A) = \dfrac{nombre\ \ de\ \ cas\ \ favorables}{nombre\ \ de\ \ cas\ \ total}$

Evénement contraire

L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ est constitué des événements de Ω n'appartenant pas à A

On a :$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Intersection- réunion

Soient A et B deux événements de Ω

On note $A \cap B$ l'événement A et B composé des événements élémentaires de A et de B

c'est à dire lorsque A et B sont réalisés simultanément.

On note $A \cup B$ l'événement A ou bien B constitué des événements élémentaires de A ou bien de B.

On a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Evénements incompatibles

Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent être réalisés simultanément.

On a donc $p(A \cap B) = 0$

2 Probabilités conditionnelles

Si $p(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé notée $p_A(B)$ et :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

soit encore $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

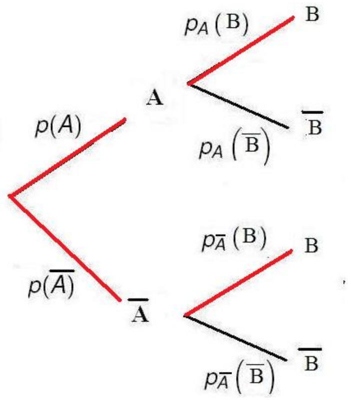
3 Probabilités totales

Si les événements A_1, $A_2 ... A_n$ forment une partition de l'univers Ω

(c'est à dire disjoints deux à deux et dont la réunion est l'univers : $A_i \cap A_j = \oslash$ et $A_1 \cup A_2 ... \cup A_n = \Omega$)

alors $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ...p(A_n \cap B)$

Si on a un arbre comme ci-dessous :



Rédaction type :
D'après la **formule des probabilités totales** :
$p(B) = p\left(A \cap B\right) + p\left(\overline{A} \cap B\right)$
$\quad = p(A) \times p_A\left(B\right) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}\left(B\right)$

4 Evénements indépendants

A et B sont indépendants signifie que $p\left(A \cap B\right) = p(A) \times p(B)$ soit $p_A\left(B\right) = p(B)$
La réalisation de A n'a pas « d'influence »sur la réalisation de B

5 Loi binomiale

Coefficients binomiaux

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, on appelle **coefficient binomial** et on note $\binom{n}{k}$ ou bien C_n^k le nombre de chemins de l'arbre pondéré correspondant à k succès dans un schéma de Bernouilli de n épreuves répétées

c'est à dire le nombre de chemins correspondant à une liste de k succès parmi n épreuves répétées.

Probabilité d'obtenir k succès parmi n

Pour tout entier k tout entier n tels que $0 \leq k \leq n$, si on a $p(S) = p$ et $P(E) = p(\overline{S}) = 1 - p$, la probabilité d'obtenir k succès parmi n est :

$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Pour calculer C_n^k avec la calculatrice, il faut utiliser la touche OPTION puis PROB puis nCr.

Rédaction :

- Déterminer l'épreuve de Bernouilli répétée de façon indépendante
- Donner la probabilité de chacune des deux issues possibles
- Identifier la variable aléatoire utilisée (correspondant au nombre de succès obtenus)

Voir rédaction type et exemple dans le **cours loi binomiale**

Espérance $E = n \times p$

Variance V $= n \times p \times (1 - p)$

6 Loi uniforme

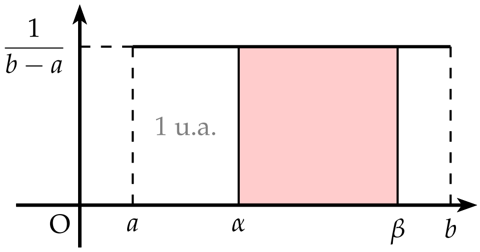
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme dans l'intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$, avec $a \neq b$ lorsque la densité f est constante sur cet intervalle. On en déduit alors la fonction f :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a alors :

$$p(X \in \mathrm{J}) = \frac{\beta - \alpha}{b-a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$$

La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.



Remarque

1. L'événement ($X \in [a;b]$) se note aussi $(a \leqslant X \leqslant b)$ ou de manière simplifiée ($[a;b]$).
Ainsi, on écrira indifféremment $p(X \in [a;b])$, $p(a \leqslant X \leqslant b)$ ou $p([a;b])$.

2. L'événement ($X \in [a;+\infty[$) se note aussi $(X \geqslant a)$.
Ainsi, on écrira indifféremment $p(X \in [a;+\infty[)$, $p(X \geqslant a)$.

On notera que $p(X \geqslant a) = 1 - p(X < a)$
car $(X \geqslant a)$ et $(X < a)$ sont des événements contraires.

3. $a \in \mathbb{R}$, $p(X = a) = 0$. En loi continue, la probabilité « ponctuelle » est nulle

4. $p(X \geqslant a) = p(X > a)$.

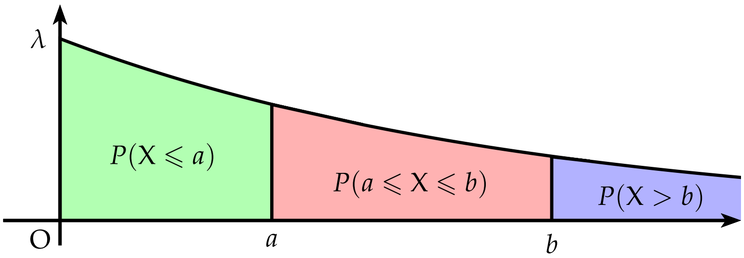
7 Loi exponentielle

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre réel $\lambda > 0$

0 lorsque sa densité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Conséquence On peut vérifier que :

- la fonction de répartition F vaut : $F(x) = P(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$
  En effet :
$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$
- f est bien une densité de probabilité, car la fonction f est positive et :
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1$$
- on a
$$P(X \leqslant a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$$
- En passant par l'événement contraire, on a :
$$P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$$
- Enfin si X se trouve dans un intervalle $[a, b]$, on a :
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$



Théorème: La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** c'est à dire que :

$$t > 0 \text{ et } h > 0 \quad \text{on a} \quad P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$