



Homothétie

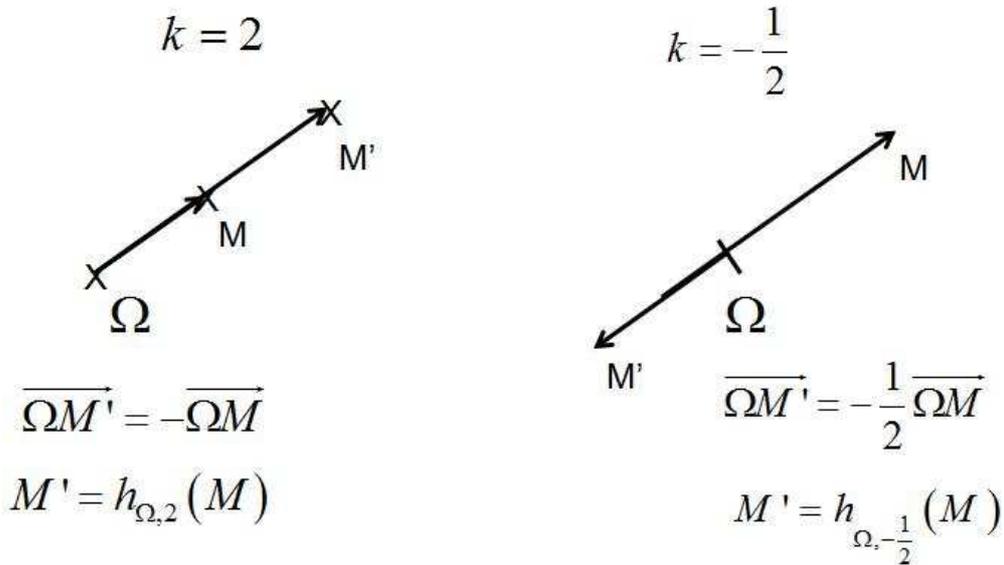
Définition

Soit Ω un point quelconque du plan ou et soit k un nombre réel non nul ($k \neq 0$).

On appelle homothétie de centre $h_{\Omega, k}$ et de rapport k et on note $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ la transformation qui à pour tout point M du plan associe le point M' .

tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

Exemple



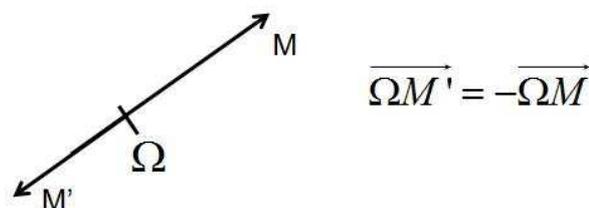
Remarques

- Si $k = 1$, alors, pour tout point M , on a $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ donc $M' = M$

Tout point du plan est invariant et l'homothétie $h_{\Omega, 1}$ est l'application identique.

- Si $k \neq 1$, le centre Ω de l'homothétie est le seul point invariant.

- Si $k = -1$, l'homothétie $h_{\Omega, -1}$ est la symétrie de centre Ω





Homothétie

Une première propriété des homothéties

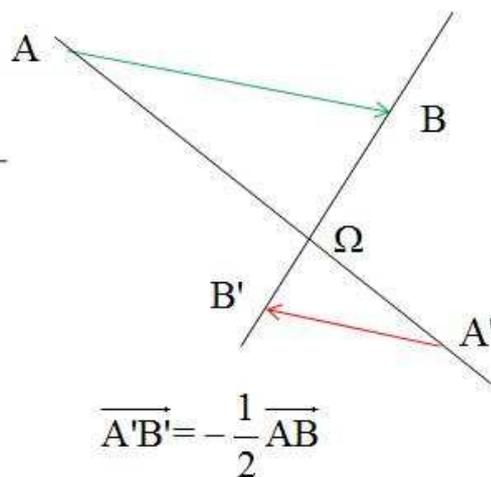
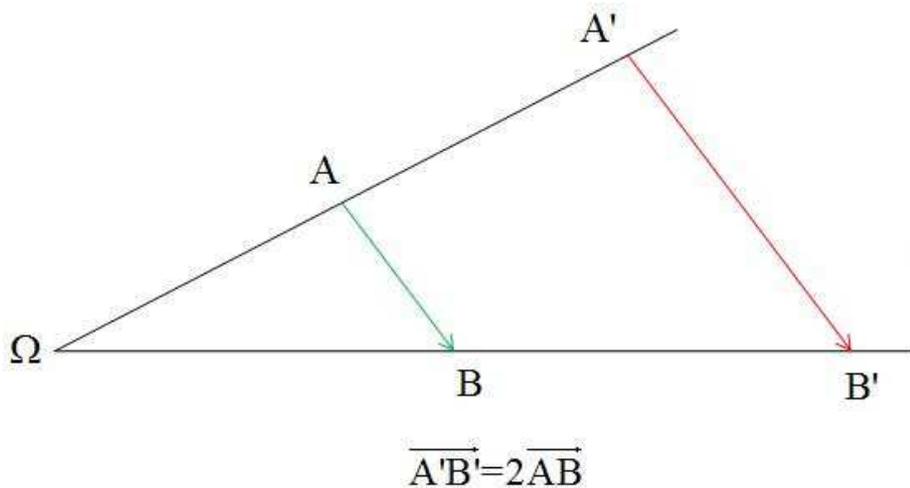
Un point et son image par une homothétie sont alignés avec le centre de l'homothétie.

si A, B et C sont trois points alignés, distincts deux à deux, il existe une homothétie, et une seule, de centre A et qui transforme B en C

Propriété fondamentale

Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une homothétie de rapport k , alors on a

$$\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$$



Homothétie et longueurs, aires et volumes

Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, l'aire par k^2



Homothétie

Translation, homothétie et alignement

Une translation et une homothétie conservent l'alignement.

Autrement dit, les images par une translation ou une homothétie de points alignés sont des points alignés.

Translation, homothétie et barycentre

Une translation et une homothétie conservent le barycentre.

Autrement dit, si G est le barycentre de (A, a) et (B, b) , alors l'image G' de G par une translation ou une homothétie est le barycentre de (A', a) et (B', b) où A' et B' sont les images respectives de A et de B .

Remarque

- En particulier une translation ou une homothétie conserve le milieu :
- Cette propriété de conservation du barycentre s'étend au barycentre de trois points ou plus.

Image d'une droite ou d'un segment

Soient A et B deux points distincts et soient A' et B' leurs images respectives par la translation ou une homothétie.

- ♦ L'image de la droite $(A B)$ est la droite $(A' B')$, elle est parallèle à la droite $(A B)$.
- ♦ L'image du segment $[A B]$ est le segment $[A' B']$.

Translations, homothéties et angles

Une translation et une homothétie conservent les angles géométriques et, dans le plan orienté, elles conservent les angles orientés.

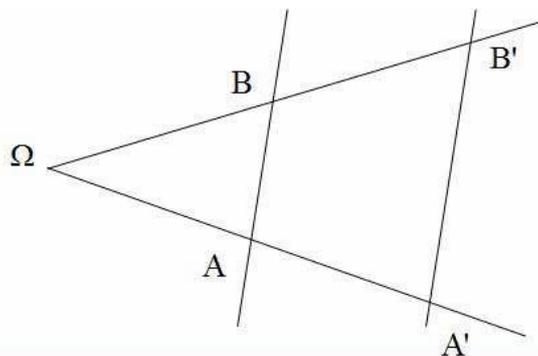
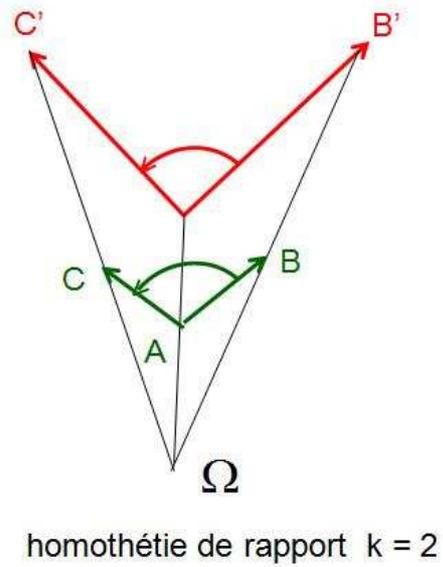
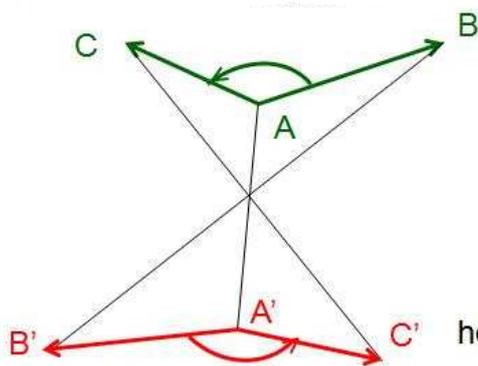
Autrement dit, si A, B et C sont trois points deux à deux distincts et si A', B' et C' sont leurs images respectives par une translation ou une homothétie, alors on a

$$\widehat{B' A' C'} = \widehat{B A C}$$

angles
géométriques

Homothétie

Exemple



Homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$.