Etude de fonctions rationnelles

Exercice n°1 :

On considère la courbe d'équation $y=\frac{x(ax+b)}{3(x-c)^2}$ où a, b et c sont trois réels, dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Déterminer les réels a, b et c pour que la courbe ait deux asymptotes d'équations respectives $x = 2$ et $y=\frac{2}{3}$ et que la tangente en O ait pour équation $y=-\frac{1}{2}x$

Exercice n°2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{2x-3}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Calcul des limites.
   a. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
   b. Déterminer la limites de la fonction f en $\frac{3}{2}$. En donner une interprétation graphique.
2. Etude des variations de la fonction f.
   a. Calculer la dérivée *f '(x)*
   b. Etudier son signe.
   c. Donner le tableau de variation de *f*.
3. Intersection avec les axes de coordonnées.
   a. Donner les coordonnées du ou des point(s) d'intersection de la courbe de *f* avec de l'axe des ordonnées.
   b. Donner les coordonnées du ou des points d'intersection de la courbe de *f* avec l'axe des abscisses.
4. Asymptote oblique.
   a. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq\frac{3}{2}$, on ait $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-3}$
   b. Montrer que 1a droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f.
   c. Etudier la position relative de la droite (Δ) et de la courbe C_f .

Etude de fonctions rationnelles

5. Centre de symétrie.

   a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux asymptotes.

   b. Montrer que ce point d'intersection est centre de symétrie de la courbe C_f.

6. Donner l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

7. Déterminer les coordonnées du point K de la courbe C_f où la tangente (T') est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 3$

8. Tracer les tangentes (T), (T'), les tangentes horizontales , la droite (Δ), les asymptotes éventuelles, le centre de symétrie et la courbe C_f.

9. Soit Δ_m la droite d'équation $y = m$ avec m un réel. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Etude de fonctions rationnelles

CORRIGE

Exercice n°1 :

Posons f(x) = $\dfrac{x(ax+b)}{3(x-c)^2}$, pour tout réel x différent de 2.

- la courbe admet une asymptote d'équation $x = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$

  Or $\lim\limits_{x\to 2} x(ax+b) = 4a+2b$ et $\lim\limits_{x\to 2} 3(x-c)^2 = 3(2-c)^2 \Rightarrow 2-c=0 \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{c = 2}}$

- la courbe admet une asymptote d'équation $y = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$

  Or, en utilisant la règle sur les fonctions rationnelles citée dans l'exercice n°1, on obtient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(ax+b)}{3(x-2)^2} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{a = 2}}$

- La courbe admet une tangente en O d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

  On calcule la dérivée : $u(x) = 2x^2 + bx$ $\quad v(x) = 3(x-2)^2$
  $u'(x) = 4x + b$ $\quad v'(x) = 6(x-2)$

  D'où $f'(x) = \dfrac{(4x+b)(3(x-2)^2 - (2x^2+bx)(6(x-2))}{[3(x-2)^2]^2} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{b\times(3\times(-2)^2)}{[3(-2)^2]^2} = \dfrac{b}{12}$

  $\Rightarrow \dfrac{b}{12} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{b = -6}}$

- Conclusion : $\boxed{y = \dfrac{x(2x-6)}{3(x-2)^2}}$

Etude de fonctions rationnelles

CORRIGE

Exercice n°2 :

1. **Calcul des limites.**

a. Pour calculer la limite d'une fonction rationnelle en + ∞ et en - ∞, on détermine la limite du quotient des termes de plus haut degré.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{2x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

b. On a $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 2x^2-x-1 = 2$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 2x-3 = 0$ Donc on obtient une forme indéterminée.

On étudie le signe de $2x - 3$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$	||	$+$

Donc on a : $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} 2x-3 = 0^+ \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} 2x-3 = 0^- \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty}$

Par conséquent, la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

2. **Etude des variations de la fonction *f*.**

a. *Calcul de la dérivée f'.*

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{3}{2} \}$ (en tant que fonction rationnelle)

f' est de la forme $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 2x^2-x-1$ et $v(x) = 2x-3$

$u'(x) = 4x-1$ $v'(x) = 2$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(4x-1)(2x-3)-2(2x^2-x-1)}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2-12x+5}{(2x-3)^2}$$

b. *Etudier son signe.*

On a $(2x - 3)^2 > 0$ pour tout $x \notin \mathbb{R} / \{ \frac{3}{2} \} \Rightarrow f'(x)$ est du signe de $4x^2 - 12x + 5$

On calcule le discriminant $\Delta = 64 > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles

$$x_1 = \frac{12-8}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12+8}{8} = \frac{5}{2}$$

le trinôme $4x^2 - 12x + 5$ est du signe de a = 4 à l'extérieur des racines

Etude de fonctions rationnelles

CORRIGE

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$4x^2 - 12x + 5$		+	0	−		−	0	+	
$(2x-3)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	

c. *Donner le tableau de variation de f.*

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

3. Coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes de coordonnées.

a. *Intersection avec l'axe des ordonnées*

On a $f(0) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des abscisses A (0 ; $\frac{1}{3}$)

b. *Intersection avec l'axe des abscisses*

On doit résoudre $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = \frac{1}{2}$ donc les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées B (1 ; 0) et C ($\frac{1}{2}$; 0)

4. a. $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-3} = \frac{(ax+b)(2x-3)+c}{2x-3} = \frac{2ax^2 + 2bx - 3ax - 3b + c}{2x-3} = \frac{2x^2 - x - 1}{2x-3}$

En identifiant les coefficients, on obtient : 2a = 2 , 2b – 3a = – 1 et c – 3b = – 1.

D'où a = 1 b = 1 et c = 2

Donc $f(x) = x + 1 + \frac{2}{2x-3}$

b. On calcule la limite de $f(x) - (x+1)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + \frac{2}{2x-3} - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{2x-3}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 3 = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$ Idem pour la limite en $-\infty$.

Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est bien une asymptote à la courbe C_f

Etude de fonctions rationnelles

CORRIGE

c. Pour étudier la position de la droite Δ par rapport à la courbe C_f, on étudie le signe de $f(x)-(x+1)$ c'est-à-dire de $\dfrac{2}{2x-3}$ qui est du signe de $2x-3$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)-(x+1)$	$-$	||	$+$

Conclusion : sur $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$, la courbe C_f est en dessous de la droite Δ et sur $]\frac{3}{2}\,;+\infty[$, la courbe C_f est au dessus de la droite Δ.

5. a. Point d'intersection des asymptotes : $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Le point d'intersection des deux asymptotes a pour coordonnées S ($\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$)

b. On a $f(3-x)=3-x+1+\dfrac{2}{2\left(3-x\right)-3}=4-x+\dfrac{2}{x-3}$

donc $f(3-x)+f(x)=5$

Donc S est bien le centre de symétrie de la courbe Cf.

6. *Equation de la tangente (T_1) au point U d'abscisse 1*.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ or $f'(1)=-3$ et $f(1)=0$ donc (T_1) : $y=-3x+3$

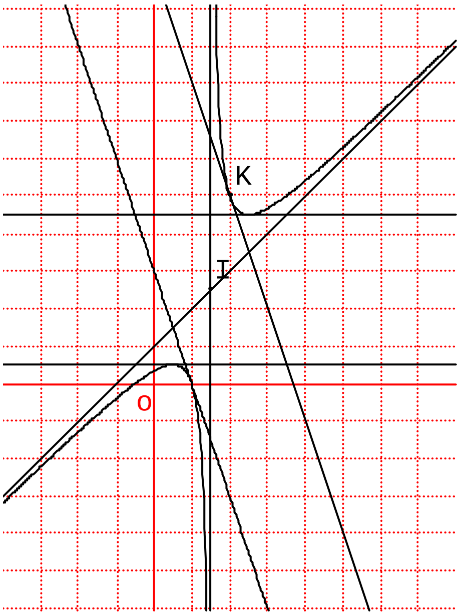
7. La courbe C_f admet un centre de symétrie donc elle admet une tangente T ' parallèle à la droite d'équation y = – 3x + 3 au point symétrie du point U (1 ; 0).

Donc le point K a pour coordonnées (2 ; 5)

Etude de fonctions rationnelles

CORRIGE

8.



L'équation $f(x) = m$ admet aucune solution lorsque $m \in \left]\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right[$

L'équation $f(x) = m$ admet une seule solution lorsque $m = \frac{1}{2}$ et pour $m = \frac{9}{2}$

L'équation $f(x) = m$ admet deux solutions lorsque $m \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{9}{2}; +\infty\right[$