Calcul dans $\mathbb{R}$

Exercice 1:

Répondre par vrai ou faux en justifiant vos réponses

1) Le carré d'un entier est un rationnel.
2) Il existe des rationnels non décimaux.
3) $\pi = 3.14159265358979$
4) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
5) 1.66 est la valeur arrondie à 10^{-2} près de $\frac{5}{3}$.

Exercice 2:

Les questions sont indépendantes

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $5 \leq \frac{1-2x}{3} \leq 9$
2) Donner l'arrondi à 10^{-2} près de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
3) Un nombre a 2,48 comme arrondi à 10^{-2} près. Dans quel intervalle est-il ?
4) Est-ce que l'arrondi à l'unité du carré, c'est la même chose que le carré de l'arrondi ?

Exercice 3:

1) Développer $A = \left(\sqrt{3} - 3\sqrt{5}\right)^2$; $B = (1+2x)^3$
2) Simplifier $C = \frac{(2a^2b^{-3})^3}{\left((ab)^5\right)^2}$; $D = \frac{(0,007 \times 10^{-4})^3}{140 \times 10^8}$
3) Factoriser $E = 2x(x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 2x)$

Exercice 4:

1) Développer $A = (2x-3)^3$ et $B = (4x+2y-5)^2$
2) Factoriser $C = 4(x^2-1) + 5(x^2-2x+1) - (x-1)$ et $D = (2x+1)^3 - (2x+1)(x^2+x+1)$.

Calcul dans $\mathbb{R}$

Exercice 5:

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $x(2x+1)-(1-3x)(2x+1)\geq 0$.
2) $\dfrac{4}{x}\leq 1+\dfrac{3}{x+1}$

Exercice 6:

On rappelle que le volume d'un cylindre de hauteur *h*, de diamètre *d*, est donné par $V=\pi\dfrac{d^2}{4}h$. On dispose d'on cylindre d'acier. A 1 mm près son diamètre *d* vaut 6 cm et sa hauteur *h* vaut 15 cm.

1) Donner un encadrement de *d*, de *h*.
2) En déduire un encadrement du volume du cylindre.
3) La masse de ce cylindre vaut M = 3300 g à 50g près. Donner un encadrement de M et en déduire un encadrement de la masse volumique de l'acier. Que pensez-vous de la précision obtenue ?

Exercice 7:

Sur un segment [*AB*] de longueur 6 cm, on place un point *I*, et on appelle *x* la longueur *AI*.
On trace les carrés *AIJK* et *IBLM*.

1) Démontrer que la surface *S* des deux carrés réunis vaut $S=2x^2-12x+36$.
2) Factoriser S – 18, et en déduire que la surface *S* est toujours supérieure ou égale à 18 cm^2.
   Peut-elle être égale à 18 cm^2 ? Pour quelle position de I ?
3) Démontrer que $S-20=2(x-2)(x-4)$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $(x-2)(x-4)\geq 0$. En déduire les valeurs de *x* telles que $S\geq 20$ cm^2.

Calcul dans $\mathbb{R}$ Corrigé

Exercice 1:

a) Vrai, car le carré d'un entier est un entier et que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

b) Vrai, par exemple $\frac{1}{3}$

c) Faux, ce n'est qu'une bête valeur approchée. π n'est pas décimal.

d) Vrai, $\mathbb{R}$ contient tous les nombres.

e) Faux, car $\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$, son arrondi à 10^{-2} près est donc 1,67.

Exercice 2:

1) $5 \leq \frac{1-2x}{3} \leq 9 \Leftrightarrow 15 \leq 1-2x \leq 27 \Leftrightarrow 14 \leq -2x \leq 26 \Leftrightarrow -13 \leq x \leq -7$.

La solution est [–13 ; –7]

2) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 3{,}146$ donc son arrondi est 3,15

3) Un nombre qui a pour arrondi 2,48 est dans [2,475 ; 2,485[

4) Le carré de l'arrondi n'est pas toujours l'arrondi du carré car par exemple, 1,7 a pour arrondi 2, et $1{,}7^2 = 2{,}89$ a pour arrondi 3.

Exercice 3:

1) $A = \left(\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)^2 = 3-6\sqrt{15}+45 = 48-6\sqrt{15}$; $B = (1+2x)^3 = 1+6x+12x^2+8x^3$

2) Simplifier $C = \frac{(2a^2b^{-3})^3}{\left((ab)^5\right)^2} = \frac{8a^6b^{-9}}{a^{10}b^{10}} = 8a^{-4}b^{-19}$, $D = \frac{(0{,}007\times10^{-4})^3}{140\times10^8} = \frac{\left(7\times10^{-7}\right)^3}{14\times10^9} = \frac{7^3\times10^{-21}}{14\times10^9} = \frac{49}{2}\times10^{-30}$

3) $E = 2x(x^2-4x+4)+(x^2-2x) = 2x(x-2)^2+x(x-2) = x(x-2)(2(x-2)+1) = x(x-2)(2x-1)$

Exercice 4:

a) $A = (2x+3)^3 = (2x)^3+3\times(2x)^2\times3+3\times2x\times3^2+3^3 = 8x^3+12x^2+54x+27$

$B = (4x+2y-5)^2 = 16x^2+4y^2+16xy-40x-20y+25$

b) $C = 4(x^2-1)+5(x^2-2x+1)-(x-1) = 4(x-1)(x+1)+5(x-1)^2-(x-1)$

$= (x-1)(4(x+1)+5(x-1)-1) = (x-1)(9x-2)$

$D = (2x+1)^3-(2x+1)(x^2+x+1) = (2x+1)((2x+1)^2-(x^2+x+1))$

$= (2x+1)(4x^2+4x+1-x^2-x-1) = (2x+1)(3x^2+3x)$

$= 3x(2x+1)(x+1)$

Calcul dans ℝ Corrigé

Exercice 5:

$x(2x+1)-(1-3x)(2x+1)\geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-(1-3x))\geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(4x-1)\geq 0$.

On peut donc faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(4x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$$

$$\frac{4}{x}\leq 1+\frac{3}{x+1}\Leftrightarrow \frac{4}{x}-1+\frac{3}{x+1}\leq 0\Leftrightarrow \frac{4(x+1)-x(x+1)+3x}{x(x+1)}\leq 0\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x(x+1)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x(x+1)}\leq 0$$

De nouveau, il reste à faire un tableau de signes, sans oublier les valeurs interdites 0 et -1 :

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2+x$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	
$(2x+1)(4x-1)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$S=]-\infty;-2]\cup]-1;0[\cup[2;+\infty[$$

Exercice 6:

d vaut 6 cm à 1 mm près donc $5,9\leq d\leq 6,1$.

De même $14,9\leq h\leq 15,1$

Les inégalités ont leurs termes positifs, on peut donc les élever au carré, les multiplier entre elles, les multiplier par le réel positif π et les diviser par le réel positif 4.

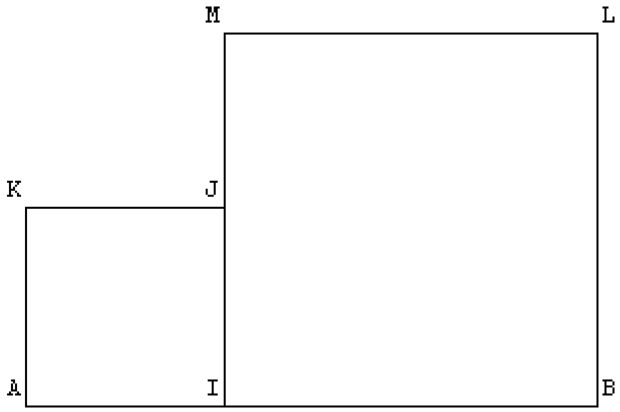
$5,9^2\leq d^2\leq 6,1^2$, donc $5,9^2\times 14,9\leq d^2\times h\leq 6,1^2\times 15,1$ et $\frac{\pi\times 5,9^2\times 14,9}{4}\leq V\leq \frac{\pi\times 6,1^2\times 15,1}{4}$

Tous calculs faits, on obtient : $407,3\leq V\leq 441,3$.

L'encadrement de M est $3250\leq M\leq 3350$, et, comme la masse volumique vaut $\mu=\frac{M}{V}$, il nous faut un encadrement de $\frac{1}{V}$ pour pouvoir diviser. Les inégalités s'inversent et on obtient $\frac{1}{441,3}\leq\frac{1}{V}\leq\frac{1}{407,3}$, donc $\frac{3250}{441,3}\leq\mu\leq\frac{3350}{407,3}$, soit $7,3\leq\mu\leq 8,5$. La précision de cette mesure est déplorable. $\frac{1}{441,3}\leq\frac{1}{V}\leq\frac{1}{407,3}$.

Calcul dans ℝ Corrigé

Exercice 7:



AI est égal à x, donc l'aire de $AIJK$ vaut x^2. BI est égal à $6-x$, donc l'aire de $IBLM$ vaut $(6-x)^2 = 36-12x+x^2$. L'aire totale de la figure est donc $S = 2x^2 - 12x + 36$.

On a donc $S-18 = 2x^2-12x+36-18 = 2x^2-12x+18 = 2(x^2-6x+9) = 2(x-3)^2$.

On peut en conclure que $S - 18$ est toujours positif (un carré est toujours positif), donc S est toujours supérieure à 18. S est égale à 18 si et seulement si $S - 18$ est égal à 0, donc si et seulement si $x = 3$. I est alors le milieu de $[AB]$

$2(x-2)(x-4) = 2(x^2-4x-2x+8) = 2x^2-12x+16$.

D'autre part, $S-20 = 2x^2-12x+36-20 = 2x^2-12x+16$. On a bien $S-20 = 2(x-2)(x-4)$.

Résolvons maintenant $(x-2)(x-4) \geq 0$:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty;2] \cup [4;+\infty[.$$

S est supérieur ou égal à 20 si et seulement si $S-20 \geq 0$, c'est à dire $2(x-2)(x-4) \geq 0$, et donc $(x-2)(x-4) \geq 0$. Mais comme x est forcément compris entre 0 et 6, il ne reste que $[0;2] \cup [4;6]$.