Suites géométriques (2)

Exercice 1 :

1. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Calculer q et u_0 sachant que : $u_3 = \frac{3}{2}$ et $u_9 = 96$.

2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q= 3 telle que $v_1 + v_2 + ... + v_n = 242$.

a) Exprimer v_n en fonction de n.

b) Calculer $S = \frac{2}{3} + 2 + 6 + ... + 1458$.

Exercice 2 :

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison non nulle q telle que : $abc = 216$ et $b + c = 15$.

1. Déterminer les réels b et q.
2. En déduire les réels a et c.
3. Soit a le premier terme de la suite (u_n). Montrer que $v_n = \frac{3^n}{2^{n-2}}$.

Exercice 3 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

1. a) Calculer la valeur du quatrième terme de la suite (u_n).

b) Exprimer, en fonction de n, u_n et $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + n$.

a) Calculer v_0, v_1 et v_2.

b) Montrer que la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

c) Exprimer $A_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de n.

Suites géométriques (2)

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est elle arithmétique ? est elle géométrique ? Justifier.
3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
4. Calculer le réel $S = u_0 + u_1 + ... + u_9$.

Exercice 5:

A- Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_5 = -12$ et $u_{12} = -40$.

1. Calculer la raison de la suite (u_n).
2. Vérifier que pour tout entier n, $u_n = 8 - 4n$.
3. Calculer $S = -12 - 16 - 20 - ... - 80$.

B- Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = -3$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + n$.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Vérifier que la suite (v_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

C- Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = 2v_n + u_n$.

1. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
2. Exprimer w_n puis v_n en fonction de n.
3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$. Montrer que $S_n = n^2 - 3n + 1 - \frac{1}{2^n}$.

Suites géométriques (2)

Exercice 1 :

1. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

   On sait que $u_3 = u_0.q^3$ et $u_9 = u_0.q^9$, il en suit : $\frac{u_9}{u_3} = q^6$.

   Or $\frac{u_9}{u_3} = 96 \times \frac{2}{3} = 64$ donc $q^6 = 64$.

   Et comme $2^6 = 64$ alors q = 2 ou q = -2.

   - ✓ Si q = 2 :

     $u_3 = u_0 \times q^3$ équivaut à $8u_0 = \frac{3}{2}$ équivaut à $u_0 = \frac{3}{16}$.

   - ✓ Si q = -2 :

     $u_3 = u_0 \times q^3$ équivaut à $-8u_0 = \frac{3}{2}$ équivaut à $u_0 = -\frac{3}{16}$.

2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q= 3 telle que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 242$.

   a) On sait que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v_1 \frac{1-3^5}{1-3} = 121v_1$ et comme $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 242$, alors $121v_1 = 242$ d'où $v_1 = 2$.

   Or $v_1 = q \times v_0 = 3v_0$ donc $3v_0 = 2$ ou encore $v_0 = \frac{2}{3}$.

   Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0.q^n = \frac{2}{3} \times 3^n = 2 \times 3^{n-1}$.

   b) On remarque que : $v_0 = \frac{2}{3}$, $v_1 = 2 \times 3^0 = 2$, $v_2 = 2 \times 3 = 6, ...$

   D'autre part $1458 = 2 \times 3^6 = 2 \times 3^{7-1} = v_7$.

   Il en résulte : $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_7 = v_0 \frac{1-q^8}{1-q} = \frac{2}{3}.\frac{1-3^8}{1-3} = \frac{3^8-1}{3} = \frac{6560}{3}$

Exercice 2 :

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison non nulle q telle que : $abc = 216$ et $b + c = 15$.

1. On a d'une part : $a = \frac{b}{q}$ et $c = bq$ donc $abc = b^3$ et d'autre part $abc = 216$ d'où $b^3 = 216$. Or $216 = 6^3$, par suite **b = 6**.

Suites géométriques (2)

Comme b + c = 15 et c = b.q alors $b+bq=15$ ou encore $6+6q=15$ d'où **q** = $\frac{3}{2}$.

2. On en déduit que : $a=\frac{b}{q}=6\times\frac{2}{3}=4$ et $c=bq=6\times\frac{3}{2}=9$.

3. Si a = 4 est le premier terme de la suite (u_n)

alors $v_n=4\times q^n=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^n=4\times\frac{3^n}{2^n}=\frac{3^n}{2^{n-2}}$.

Exercice 3 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $u_0=4$.

1. a) Le quatrième terme de la suite (u_n) est $u_3=u_0\times q^3=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=2\times 27=108$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{3^n}{2^{n-2}}$

et $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=4\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=8\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]=\frac{3^{n+1}}{2^{n-2}}-8$.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+n$.

a) $v_0=u_0=4$, $v_1=u_1+1=7$ et $v_2=u_2+2=11$.

b) $v_0+v_2=15\neq 14=2\times v_1$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

c) Pour tout entier n, $A_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$

$$=(u_0+0)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+n)$$
$$=(u_0+u_1+\ldots+u_n)+(0+1+\ldots+n)$$
$$=\frac{3^{n+1}}{2^{n-2}}-8+\frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=2u_n-3$.

1. $u_1=2u_0-3=-1$ et $u_2=2u_1-3=-5$.

Suites géométriques (2)

2. Comme $u_0+u_2=-4\neq 2u_1=-2$ alors la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

   On a aussi : $u_0\times u_2=-5\neq u_1^{\,2}=1$ donc la suite (u_n) n'est plus géométrique.

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-3$.

   Pour tout entier n, $v_{n+1}=u_{n+1}-3=2u_n-6=2(u_n-3)=2v_n$. Il en résulte que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

4. $S=u_0+u_1+\ldots+u_9=(v_0+3)+(v_1+3)+\ldots+(v_9+3)$

   $=(v_0+v_1+\ldots+v_9)+\left(3+\underset{10\text{ fois}}{3+\ldots+3}\right)=v_0\left(\dfrac{1-2^{10}}{1-2}\right)+30$.

   $=-2(2^{10}-1)+30 \quad =-2016$

Exercice 5:

A- Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_5=-12$ et $u_{12}=-40$.

1. Soit r la raison de cette suite arithmétique (u_n).

   On sait que $u_{12}=u_5+7r$ donc $7r=-28$ d'où $r=-4$.

2. Soit u_0 le premier terme de (u_n).

   On sait que : $u_5=u_0+5r$ donc $u_0=u_5-5r=-12+20=8$

   Ainsi, pour tout entier n, $u_n=u_0+rn=8-4n$.

3. Soit $S=-12-16-20-\ldots-80$.

   Remarquons que : $-12=u_5$, $-16=-12-4=u_6$, $-20=-16-4=u_7,\ldots$,

   D'autre part : $-80=-8-72=-8+(-4)\times 18=u_{18}$.

   Il en résulte que S = $(18-5+1)\dfrac{u_5+u_{18}}{2}=7\times(-92)=-644$.

B- Soit la suite (v_n) définie par : $v_0=-3$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n+n$.

1. $v_1=\dfrac{1}{2}v_0+0=-\dfrac{3}{2}$ et $v_2=\dfrac{1}{2}v_1+1=\dfrac{1}{4}$.

2. On a : $v_0+v_2=-\dfrac{11}{4}\neq -3=2v_1$ et $v_0\times v_2=-\dfrac{3}{4}\neq\dfrac{9}{4}=v_1^{\,2}$.

   Donc la suite (v_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

C- Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n=2v_n+u_n$.

1. Pour tout entier naturel n,

Suites géométriques (2)

$$w_{n+1} = 2v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + 2n + 8 - 4(n+1)$$

$$= v_n - 2n + 4 = \frac{1}{2}(2v_n + 8 - 4n) = \frac{1}{2}(2v_n + u_n) = \frac{1}{2}w_n$$

Donc (w_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = (2v_0 + u_0) \times \frac{1}{2^n} = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

D'où $v_n = \frac{1}{2}(w_n - u_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{-1}} - (8 - 4n)\right) = \frac{1}{2^n} - 4 + 2n$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

$$= \frac{1}{2}\left[(w_1 - u_1) + (w_2 - u_2) + \ldots + (w_n - u_n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[w_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - n\left(\frac{12 - 4n}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - n(6 - 2n)\right]$$

$$= n^2 - 3n + 1 - \frac{1}{2^n}$$