Série 2 : Similitudes directes

Exercice 1 (exercice 8 – page : 91 – tome 2)

Soit un carré ABCD direct de centre O. Soit S la similitude directe qui envoie A sur O et B sur D.

1. a) Préciser le rapport et l'angle de S.

   b) Construire le centre Ω de S.

   c) Déterminer S(D).

2. Existe-t-il une similitude directe S qui envoie A sur O , B sur D et D sur C ?

Exercice 2 (exercice 9 – page 91 – Tome 2)

Soit A et B deux points distincts du plan . On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport (-2) et par r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $S = r \circ h$.

1. Montrer que S est une similitude directe dont on déterminera le rapport et l'angle.
2. Soit O le centre de S et A' = S(A).

   a) Montrer que $OA' = 2OA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

   b) Construire le point O.

3. Soit B' = h(B). Construire le centre de la similitude directe $S' = h \circ r$ et préciser son angle et son rapport.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$. Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2i}{3}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$.

1. Déterminer l'image de A par s , puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s .
2. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

   a) Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n. En déduire AB_n en fonction de n.

   b) Montrer que les points A , B_n et $B_{n\ 2}$ sont alignés.

Série 2 : Similitudes directes

Corrigé

Exercice 8 – page : 91 – tome 2

1. S est la similitude directe qui envoie A sur O et B sur D .

a) On a : $\frac{OD}{AB}=\frac{\frac{1}{2}BD}{AB}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}AB}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc le rapport de S est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\pi-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

Donc l'angle de S est $\frac{3\pi}{4}$.

b) Soit Ω le centre de S ,

S(B) = D $\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega D}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ donc Ω appartient à l'arc $\overset{\frown}{DB}$ du cercle

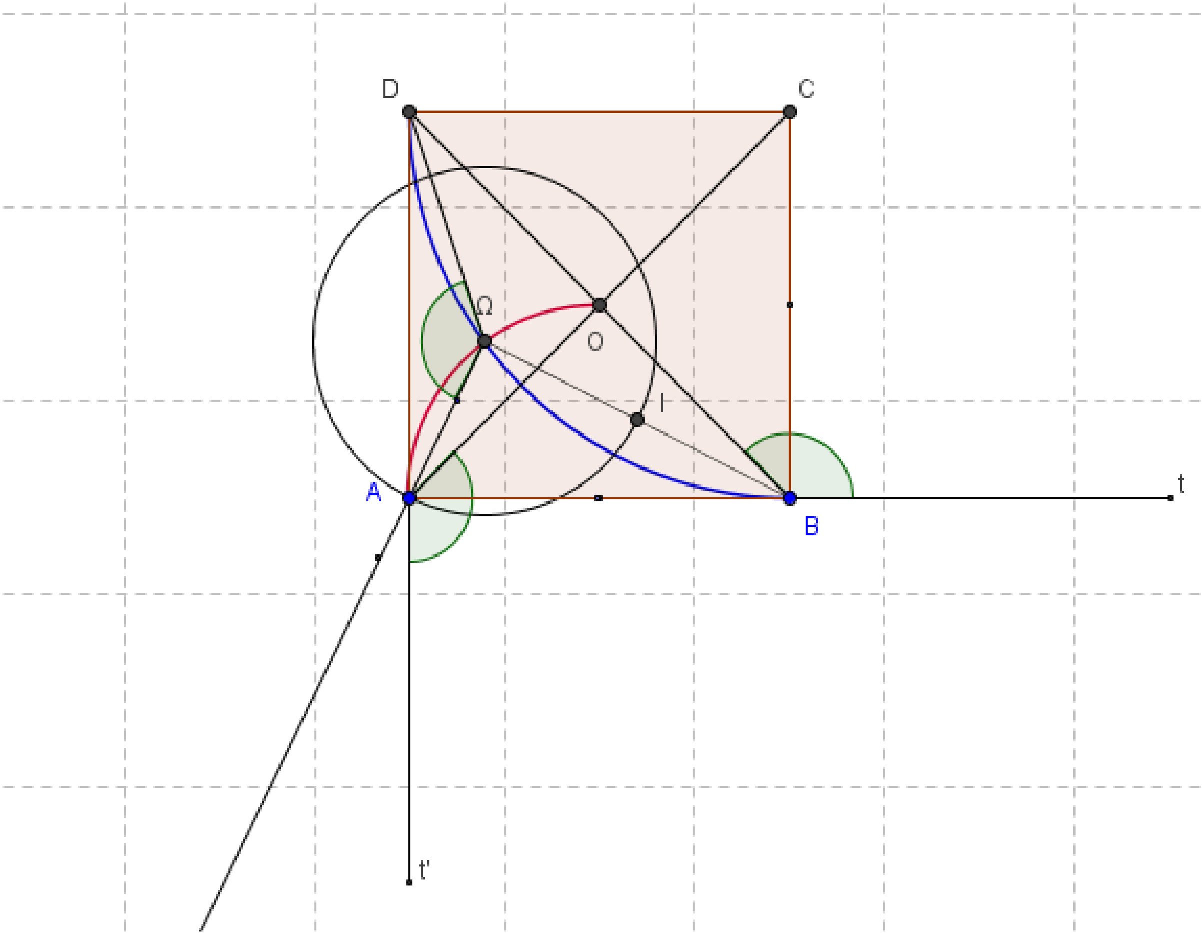
passant par B et D et tangent à la droite (Bt) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{Bt},\overrightarrow{BD}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

S(A) = O $\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega O}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ donc Ω appartient à l'arc $\overset{\frown}{OA}$ du cercle

passant par O et A et tangent à la droite (At') tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{At'},\overrightarrow{AO}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Ainsi : $\{\Omega\}=\overset{\frown}{DB}\cap\overset{\frown}{OA}$

Série 2 : Similitudes directes



c) Le triangle ABD est isocèle , rectangle en A et direct et le triangle ODA est isocèle , rectangle en O et direct donc ABD et ODA sont deux triangles semblables d'où il existe une unique similitude directe f qui envoie A sur O , B sur D et D sur A .

Or : S(A) = O = f(A) et S(B) = D = f(B).

Il en résulte : S(D) = f(D)= A.

2. Le triangle ABD est direct alors que le triangle ODC est indirect donc il n'existe aucune similitude directe qui envoie A sur O , B sur D et D sur C.

<u>Exercice 9 – page 91 – Tome 2</u>

1 . h est une homothétie de rapport (-2) donc h est une similitude directe de rapport 2 et d'angle π . D'autre part, r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc r est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que $S = r \circ h$ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Série 2 : Similitudes directes

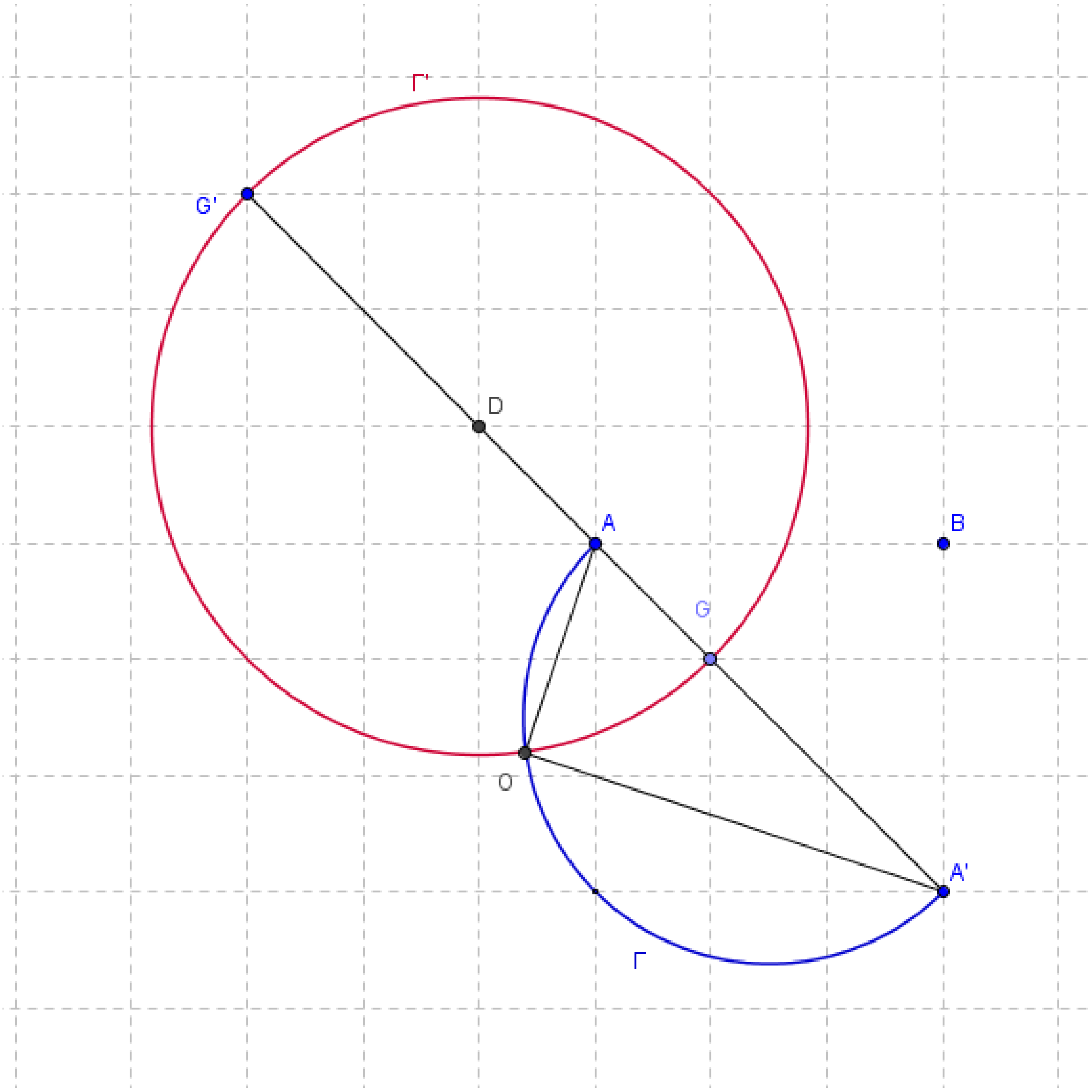
2. a) $A' = r(A) = r(h(A)) = S(A)$ et comme O est le centre de S alors

$OA' = 2OA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors O est un point de l'arc

$\overset{\frown}{AA'}$ du cercle de diamètre $[AA']$.

$OA' = 2OA$ donc O appartient au cercle de diamètre $[GG']$ où G est le barycentre de A'(1) et A(2) et G' le barycentre de A'(1) et A(-2).



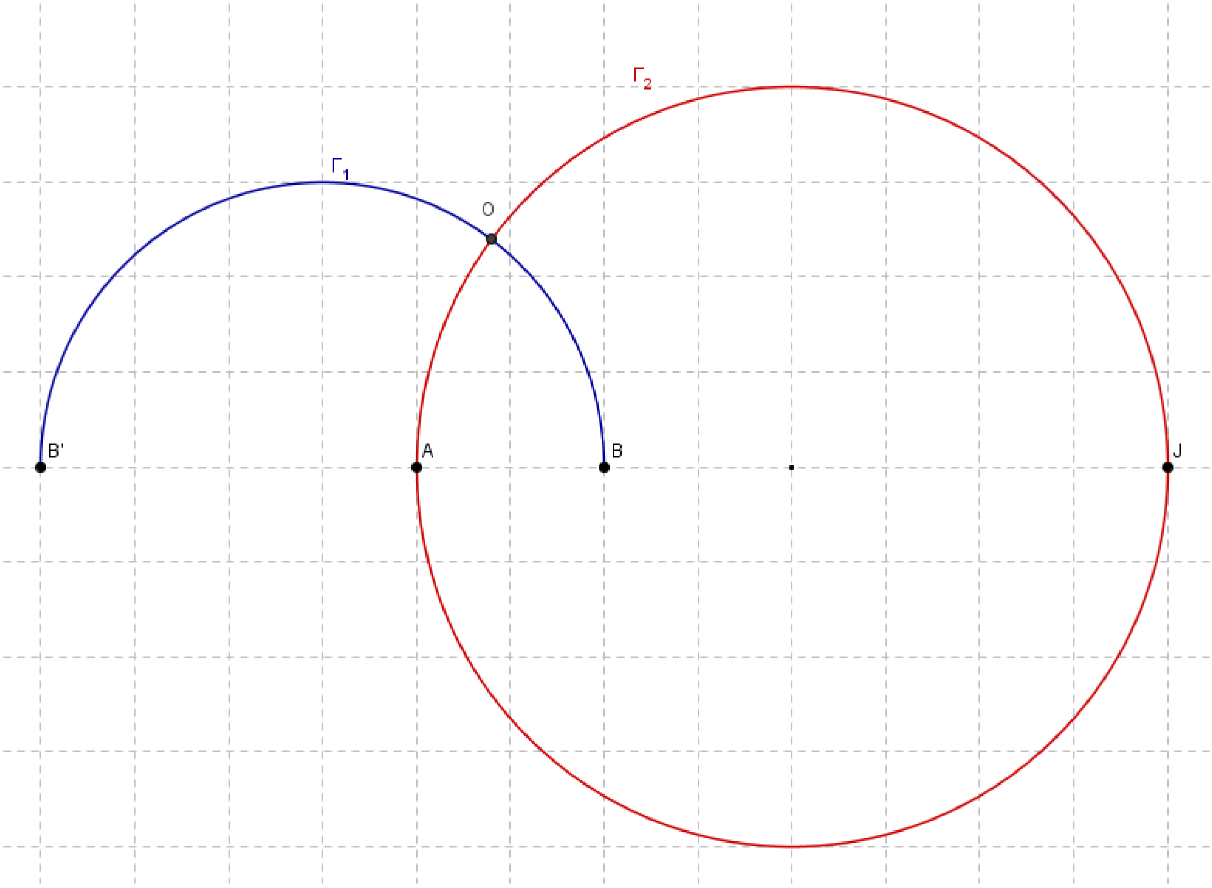
Série 2 : Similitudes directes

3. $B' = h(B) = h(r(B)) = h \circ r(B) = S'(B)$ donc $OB' = 2OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors O est un point de l'arc $\widehat{BB'}$ du cercle de diamètre $[BB']$.

$OB' = 2OB$ donc O appartient au cercle de diamètre $[IJ]$ où I est le barycentre de A'(1) et A(2) et J le barycentre de A'(1) et A(-2).

Comme $\overrightarrow{B'I} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B'B}$ alors $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$ ou encore I = A.



Série 2 : Similitudes directes

Exercice 3:

1. A d'affixe $z_A = 1 - i$ donc $A' = s(A)$ d'affixe $z'_A = \frac{2}{3} i z_A + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} i = \frac{2}{3} i(1-i) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} i = 1 - i$.

   Donc s(A) = A.

Comme $\frac{2}{3} i = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$ alors s est la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a) $s(B_n) = B_{n+1}$ donc $AB_{n+1} = \frac{2}{3} AB_n$.

   La suite de terme général AB_n est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc pour tout entier naturel

   n non nul , $AB_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n AB$.

   Or $AB = \left|7 + \frac{7}{2} i - 1 + i\right| = \left|6 + \frac{9}{2} i\right| = \sqrt{36 + \frac{81}{4}} = \frac{15}{2}$, il en suit : $AB_n = \frac{15}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   b) On a : $B_{n+1} = s(B_n)$ donc $B_{n+2} = s(B_{n+1}) = s \circ s(B_n)$.

   De plus, $s \circ s$ est la similitude de centre A , de rapport $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ et d'angle $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, par suite , $s \circ s$ est l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{4}{9}$.

   De $B_{n+2} = s \circ s(B_n)$, on peut conclure que : A, B_n et B_{n+1}.