

Série : Trigonométrie

Exercice 1

Dans un triangle ABC rectangle en A, on donne $\widehat{ABC} = 30^\circ$ et $AC = 5$.

1. Calculer la distance AB.
2. a) Soit I le milieu de [BC] ; la médiatrice de [BC] rencontre en J la droite (AC).
Calculer IJ et JC.
- b) Montrer que (BJ) est parallèle à (AI).
- c) Calculer le périmètre du trapèze AIBJ.

Exercice 2

[AB] est un diamètre du cercle de centre O de rayon 5. Soit C un point de ce cercle tel que $\widehat{COB} = 40^\circ$.

1. Déterminer la nature de chacun des triangles ABC , OAC et OBC.
2. Calculer l'angle \widehat{OAC} .
3. Calculer la distance AC.
4. Calculer BC, \widehat{ABC} , \widehat{OCB} et \widehat{OCA}

Exercice 3

Sur le cercle de centre O et de rayon 1, on considère deux points A et B diamétralement opposés sur (\mathcal{C}) et M un point de (\mathcal{C}) tel que $\widehat{AMB} = \alpha$, où $\alpha \in]0, \pi[$. On désigne par H le projeté orthogonal de M sur la droite(AB).

1. Quelle est la nature du triangle AMB ?
2. Exprimer à l'aide de α l'angle \widehat{MOB} .
3. a) Calculer $\cos \alpha$ dans le triangle AMH et dans le triangle AMB.
b) En déduire que $AM^2 = AB \times AH$.

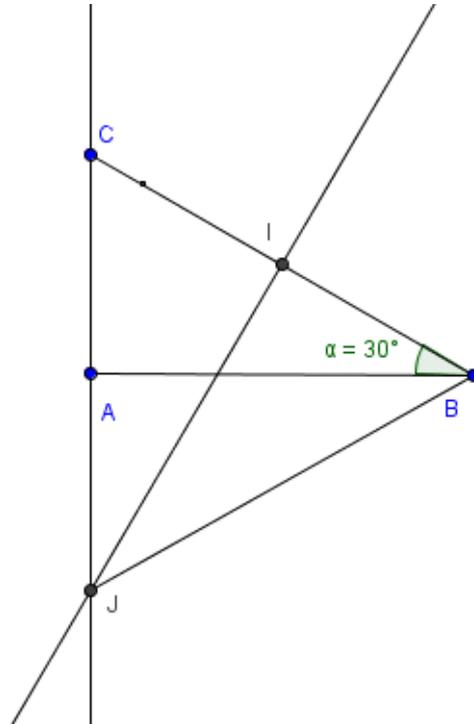
4. En déduire que $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

5. a) Montrer que $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

b) Montrer que $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Série : Trigonométrie

Exercice 1



1. On sait que $\cot 30^\circ = \frac{AB}{AC}$ donc $AB = \cot 30^\circ \times AC = 5\sqrt{3}$.

2. a) $\widehat{IMJ} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$.

Dans le triangle ICJ rectangle en I, on a : $\tan 60^\circ = \frac{IJ}{IC}$ d'où $IJ = \tan 60^\circ \times IC$.

Donc il faut calculer IC d'abord. Pour cela, utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (5\sqrt{3})^2 + 5^2 = 75 + 25 = 100 \quad \text{d'où } BC = 10 \text{ et } IC = 5.$$

Par suite : $IJ = \tan 60^\circ \times IC = 5\sqrt{3}$.

A présent, calculer JC :

$$JC^2 = IJ^2 + IC^2 = (5\sqrt{3})^2 + 5^2 = 100 \quad \text{donc } JC = 10.$$

b) $AJ = JC - AC = 5$ d'où A est le milieu du segment [JC].

Or I est le milieu du segment [BC], donc (BI) est parallèle à (AI).

c) $CJ = CB$ et $\widehat{BCJ} = 60^\circ$ donc le triangle BJC est équilatéral.

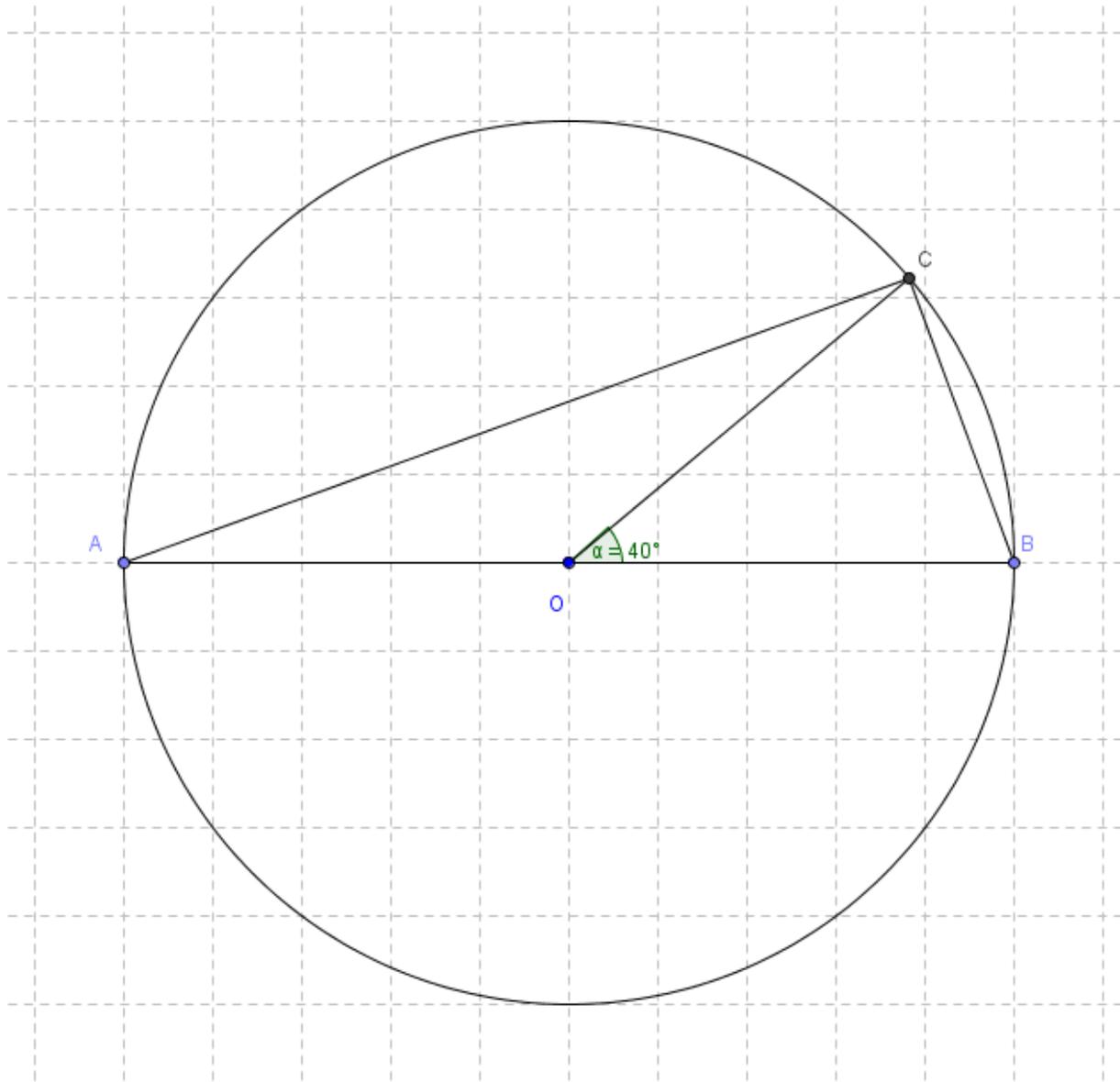
Par conséquent, $BJ = 10$ et $AI = \frac{1}{2}BJ = 5$.

Le périmètre du trapèze AIBJ est : $AI + IB + BJ + JA = 25$.



Série : Trigonométrie

Exercice 2

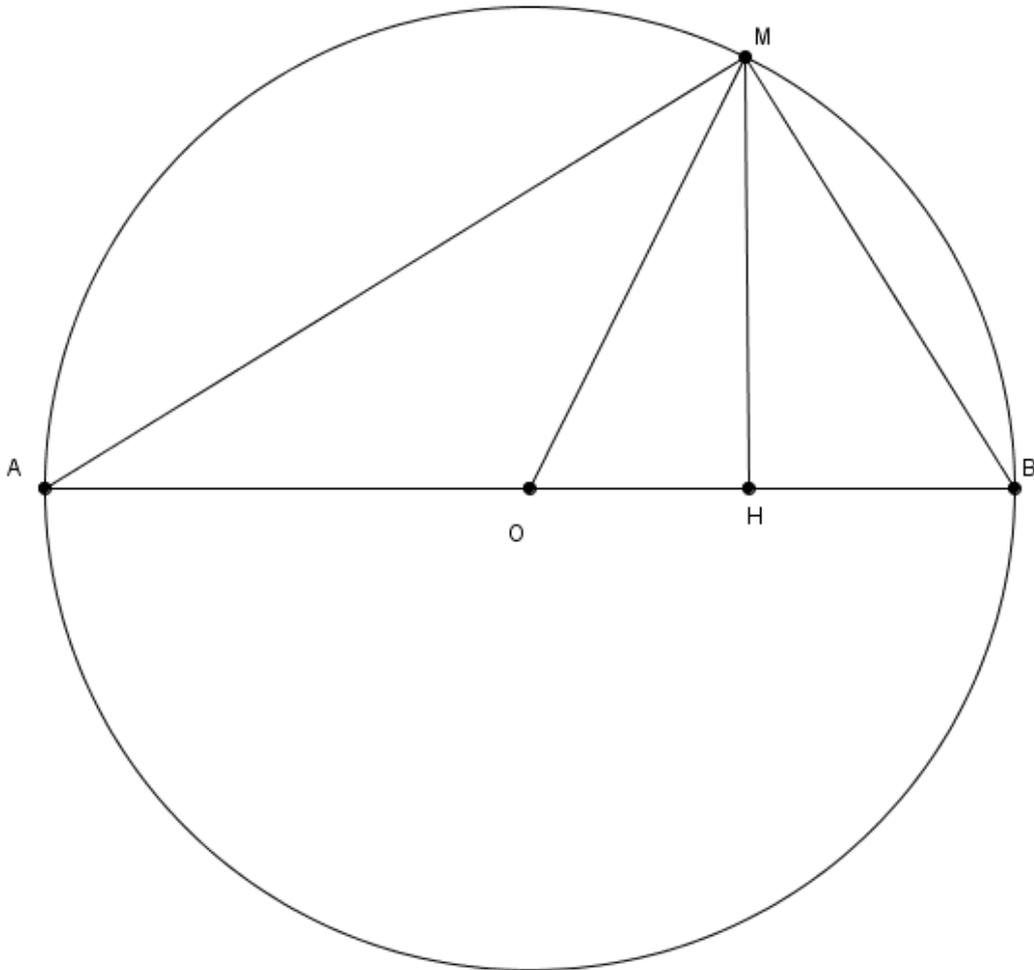


1. C est un point du cercle de diamètre $[AB]$ donc ABC est un triangle rectangle en C.
 OAC est un triangle isocèle de sommet principal O.
 OBC est un triangle isocèle de sommet principal O.
2. D'après le théorème de l'angle au centre : $\widehat{OAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = 20^\circ$.
3. On a : $\cos 20^\circ = \frac{AC}{AB}$ donc $AC = AB \times \cos 20^\circ = 10 \times \cos 20^\circ \approx 9,4$.
4. $BC^2 = AB^2 - AC^2 \approx 11,64$ d'où $BC \approx 3,4$.
 $\widehat{ABC} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$
 $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 70^\circ$ et $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 20^\circ$



Série : Trigonométrie

Exercice 3



1. AMB est un triangle rectangle en M car $[AB]$ est un diamètre du cercle (\mathcal{C}) et M est un point de ce cercle.
2. D'après le théorème de l'angle au centre : $\widehat{MOB} = 2 \widehat{MAB} = 2\alpha$.
3. a) $\cos \alpha = \frac{AH}{AM}$ dans le triangle AMH et $\cos \alpha = \frac{AM}{AB}$ dans le triangle AMB .
 b) On en déduit que : $\frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AM^2 = AB \times AH$.
4. On a : $\cos^2 \alpha = \frac{AH^2}{AM^2} = \frac{AH^2}{AB \times AH} = \frac{AH}{AB}$.



Série : Trigonométrie

$$\text{D'autre part : } \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{OH}{OM}}{2} = \frac{OM + OH}{2OM} = \frac{OA + OH}{2OA} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{D'où } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$5. \text{ a) } \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \text{ donc } \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

$$\text{b) } \cos 15^\circ = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{6 + 4\sqrt{3} + 2}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$