Probabilités

Exercice 1.

Une étude de la population d'une grande ville de province a fait apparaître que pendant un mois :

35 % des personnes sont allées au cinéma, 12 % des personnes sont allées au musée,

et 6 % des personnes sont allées aux deux.

Calculer la probabilité que, pendant ce mois, une personne ait fait les choix suivants :

a) Aller au cinéma ou au musée,

b) Ne pas aller au cinéma,

c) N'aller ni au cinéma, ni au musée,

d) Aller au cinéma mais pas au musée.

Exercice 2.

Dans un laboratoire se trouve une cage avec 100 souris présentant deux caractères : sexe (mâle ou femelle), couleur (blanche ou noire) ; 87 sont mâles, 57 sont blanches et 55 sont mâles et blanches.

1°/ Donner l'effectif par catégorie.

2°/ Une assistante prend une souris au hasard. Calculer la probabilité pour qu'elle obtienne une souris blanche ou une souris mâle.

3°/ Elle décide de choisir 6 souris. Calculer la probabilité qu'elle obtienne 6 souris blanches si les prélèvements sont réalisés :

a) avec remise

b) sans remise

Exercice 3.

On veut étudier l'influence de l'ordre de la prise de trois médicaments sur l'efficacité d'un traitement constitué par ces trois produits.

De combien de façons possibles peut-on organiser ce traitement ?

Probabilités

Exercice 4.

Soit l'ensemble des chiffres de 0 à 9 inclus.

Combien peut-on former de nombres de cinq chiffres, tous distincts, avec les dix chiffres ?

(On rappelle qu'un nombre de cinq chiffres commençant par un 0 est nombre de quatre chiffres).

Exercice 5.

Une classe de 3 Année compte 35 élèves dont 20 garçons.

12 élèves , dont 5 filles n'ont pas de moyenne au premier trimestre.

On choisit au hasard un élève dans cette classe de 3 Année.

On note A l'évènement : "l'élève choisi est un garçon".

On note B l'évènement : "l'élève choisi n'a pas de moyenne".

1. Calculer $P(A)$
2. Calculer $P(B)$:
3. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon et n'a pas de moyenne.
4. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon ou n'a pas de moyenne.
5. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon qui n'a pas de moyenne ou une une fille qui a une moyenne.

Exercice 6.

Une urne contient dix boules (6 blanches et 4 rouges).

On tire au hasard et successivement deux boules de cette urne.

Calculer, dans le cas où le tirage est effectué avec remise, puis dans le cas où le tirage est effectué sans remises, les probabilités suivantes :

— les deux boules tirées sont blanches,

— les deux boules tirées sont de même couleur,

— l'une au moins des boules tirées est blanche .

Probabilités : corrigé

SOLUTION 1.

Les résultats de l'étude peuvent être présentés sous forme de tableau :

	Sont allées au musée	Ne sont pas allées au musée	Total
Sont allées au cinéma	6 %		35 %
Ne sont pas allées au cinéma			
Total	12 %		

Les cases vides du tableau peuvent être complétées par différence :

	Sont allées au musée	Ne sont pas allées au musée	Total
Sont allées au cinéma	6 %	29 %	35 %
Ne sont pas allées au cinéma	6 %	59 %	65 %
Total	12 %	88 %	100 %

Ce tableau montre que :

59 % des personnes ne sont allées ni au cinéma, ni au musée, donc, par différence,

41 % sont allées au cinéma ou au musée.

65 % des personnes ne sont pas allées au cinéma.

29 % sont allées au cinéma mais ne sont pas allées au musée.

Probabilités : corrigé

SOLUTION 2.

1. Les quatre données de l'énoncé permettent de remplir le tableau des effectifs,

suivant les caractères.

	Mâle	Femelle	Total
Blanche	**55**	2	**57**
Noire	32	11	43
Total	**87**	13	**100**

2.

Soit B = « La souris est blanche » et M = « La souris est mâle »

$P(B \cup M) = P(B) + P(M) - P(B \cap M) = 0,57 + 0,87 - 0,55 = 0,87 + 0,02 = 0,89.$

3. Dans un tirage, la probabilité de tirer une souris blanche est P (B) = 0,57.

Dans 6 tirages indépendants, la probabilité de tirer 6 souris blanches est

$$(0,57)^6 = 0,034296447249 \simeq 3,4310^{-2}.$$

4. La probabilité de tirer 6 souris blanches en 6 tirages successifs sans remise est alors le

produit des probabilités : $\frac{57}{100} \times \frac{56}{99} \times \frac{55}{98} \times \frac{54}{97} \times \frac{53}{96} \times \frac{52}{95} \approx 3,04 \times 10^{-2}.$

Cette probabilité peut être calculée en faisant le rapport du nombre de cas favorables C_{57}^{6}

au nombre de cas possibles C_{100}^{6} :

$$\frac{C_{57}^{6}}{C_{100}^{6}} = \frac{36288252}{1192052400} = \frac{2067}{67900} = 0,030441826215 \approx 3,04 \times 10^{-2}.$$

Probabilités : corrigé

SOLUTION 3.

Le nombre de traitements possibles est le nombre de permutations d'un ensemble à trois éléments, qui est aussi le nombre de bijections d'un ensemble à trois éléments : c'est 3 !, factorielle 3, qui vaut $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Il y a 6 façons possibles d'organiser le traitement.

On peut énumérer facilement les six façons possibles d'organiser le traitement avec trois produits A, B, C : (A, B, C), (A, C, B), (B, C, A), (B, A, C), (C, A, B) et (C, B, A).

SOLUTION 4.

1 ^{e} méthode.

Il y a $A_9^1 = 9$ façons de choisir le premier chiffre parmi les chiffres de 1 à 9. Une fois le premier chiffre parmi les chiffres de 1 à 9. Une fois le premier chiffre choisi, il y a $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 =$ 3 024 façons de choisir les 4 chiffres suivants.

Au total, il y a $9 \times 3\,024 = 27\,216$ nombres de 5 chiffres différents ne commençant pas par un 0.

27 216 nombres de 5 chiffres différents ne commencent pas par un 0.

2 ^{e} méthode.

Il y a 9 façons de choisir le premier chiffre différent de 0.

Il y a 9 façons de choisir le deuxième chiffre parmi les 9 chiffres restant après le choix du premier chiffre.

Il y a 8 façons de choisir le 3^{e} chiffre parmi les 8 chiffres restant après le choix des deux premiers chiffres.

Il y a 7 façons de choisir le 4^{e}chiffre parmi les 7 chiffres restant après le choix des trois premiers chiffres.

Il y a 6 façons de choisir le 5^{e} chiffre parmi les 6 chiffres restant après le choix des quatre premiers chiffres.

Au total, nous obtenons :

$9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 =$ 27 216 nombres de 5 chiffres différents ne commençant pas par un 0.

Probabilités : corrigé

3 ^{e} méthode.

Il y a $A_{10}^{5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$ façons de choisir 5 chiffres différents parmi les 10 chiffres de 0 à 9 , et de les ordonner pour faire un nombre de 5 chiffres.

Il y a $A_{9}^{4} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\,024$ nombres ayant quatre chiffres différents de 0 et différents entre eux.

Ces A_{9}^{4} sont en correspondance biunivoque avec les nombres de 5 chiffres différents commençant par un 0.

Il y a donc :

$A_{10}^{5} \times A_{9}^{4} = 30\,240 \times 3\,024 = 27\,216$ nombres de 5 chiffres différents ne commençant pas par un 0.

4 ^{e} méthode.

Il y a $A_{10}^{5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$ façons de choisir 5 chiffres différents parmi les 10 chiffres de 0 à 9, et de les ordonner pour faire un nombre de 5 chiffres. Pour chacun de ces 30 240 nombres possibles, il y a une chance sur 2 pour qu'il y ait un 0, puisque l'on prend 5 chiffres sur 10. Parmi les nombres contenant un 0, il y a une chance sur 5 pour que le 0 soit soit placé au début, puisque les nombres ont 5 chiffres. Donc, parmi les 30 240 nombres possibles, il y a une chance sur 10 ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$) pour que le nombre commence par un 0, et 9 chances sur 10 pour qu'il ne commence pas par un 0. Il y a donc $9 \times 30\,240 = 27\,216$ nombres de 5 chiffres différents ne commençant pas par un 0.

Probabilités : corrigé

SOLUTION 5.

Il y a équprobabilité car l'élève est choisi au hasard.

1. $P(A) = \dfrac{\text{nombre de garcons}}{\text{nombre d'eleves de la classe}} = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$

2. $P(B) = \dfrac{\text{nombre d'élève n'ayant pas de moyenne}}{\text{nombre d'eleves de la classe}} = \dfrac{12}{35}$

3. $P(A \cap B) = \dfrac{\text{nombre de garçons n'ayant pas de moyenne}}{\text{nombre d'eleves de la classe}} = \dfrac{12-5}{35} = \dfrac{1}{5}$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{4}{7} + \dfrac{12}{35} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{25}{35} = \dfrac{5}{7}$

5. Un tableau est pratique :

	A	$\bar{A}$	Total
B	7	5	12
$\bar{B}$	13	10	23
Total	20	15	35

$P\left[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\right] = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$ car les évènements sont incompatibles

D'où $P\left[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\right] = \dfrac{7}{35} + \dfrac{10}{35} = \dfrac{17}{35}$

Probabilités : corrigé

SOLUTION 6.

A. Tirage avec remise.

Dans ce cas, les épreuves sont indépendantes et les probabilités sont les mêmes dans les deux tirages successifs. Dans un tirage, la probabilité d'une boule blanche est égale au nombre de cas cas favorables (6), divisé par le nombre de cas possibles (10), c'est donc 0,6.

1. Probabilité pour que les deux boules soient blanches.

Notons B_1 l'évènement : " La boule tirée dans le premier tirage est blanche ".
Notons B_2 l'évènement : " La boule tirée dans le deuxième tirage est blanche ".
On a :
$P(B_1) = 0,6$, $P(B_2) = 0,6$

On en déduit la valeur de la probabilité de l'évènement $B_1 \cap B_2$:

" La boule tirée dans le premier tirage est blanche et la boule tirée dans le deuxième tirage est blanche ".

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\,P(B_2) = 0,6^2 = 0,36.$$

La probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches est 0,36.

Probabilités : corrigé

2. Probabilité pour que les deux boules soient de la même couleur.

Soient

l'évènement : " La boule tirée dans le premier tirage est rouge ",

l'évènement : " La boule tirée dans le deuxième tirage est rouge ".

On a : $P(B_1) = 0,6$ donc $P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 0,4$

$P(B_2) = 0,6$ donc $P(\overline{B_2}) = 1 - P(B_2) = 0,4$

L'évènement C : " Les boules tirées lors des deux tirages successifs sont de même couleur "

peut être écrit : $C = (B_1 \cap B_2) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$

Or les évènements $B_1 \cap B_2$ et $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ sont incompatibles, leur intersection est vide.

L'axiome des probabilités totales indique alors que l'on a : $P(C) = P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$

$$P(C) = P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1 \cup B_2}) = P(B_1 \cap B_2) + 1 - P(B_1 \cup B_2)$$

$$P(C) = P(B_1)\,P(B_2) + 1 - (P(B_1) + P(B_1) - P(B_1 \cap B_2)) = 1 + 2\,P(B_1)\,P(B_2) - P(B_1) - P(B_2)$$

Donc $P(C) = 1 + 2 \times 0,6 \times 0,6 - 0,6 - 0,6 = 1,72 - 1,20 = 0,52$.

Ainsi, la probabilité pour que les deux boules tirées soient de même couleur est 0,52.

3. Probabilité pour que l'une au moins des boules tirées soit blanche.

Soit B l'évènement : " L'une au moins des boules tirées est blanche ". L'évènement complémentaire $\overline{B}$

est : " Les deux boules tirées sont rouges ", $\overline{B} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$.

$$P(\overline{B}) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1}) \times P(\overline{B_2}) = (1 - P(B_1))(1 - P(B_2)) = (1 - 0,6)(1 - 0,6) = 0,16$$

Par conséquent : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,16 = 0,84$

Donc la probabilité pour que l'une au moins des boules tirées soit blanche est 0,84.

Probabilités : corrigé

B. Tirage sans remise.

Dans ce cas, la probabilité de tirer une boule blanche dans le premier tirage est $P(B_1) = 0{,}6$.

Mais la probabilité de tirer une boule blanche dans le deuxième tirage dépend de la boule tirée au premier tirage :

Si la première boule tirée est blanche alors :

la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche est $\frac{5}{9}$

et la probabilité que la deuxième boule tirée ne soit pas blanche est $\frac{6}{9}$

1. Probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches.

La probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches est

$$P(B_1 \cap B_2) = \quad = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

2. Probabilité pour que les deux boules tirées soient de la même couleur.

Comme précédemment, l'évènement C : " Les boules tirées lors des deux tirages successifs sont de même couleur " peut être écrit : $C = (B_1 \cap B_2) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$

Or les évènements $B_1 \cap B_2$ et $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ sont incompatibles, leur intersection est vide.

L'axiome des probabilités totales indique alors que l'on a :

$$P(C) = P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$$

$$P(C) = P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1 \cup B_2}) = P(B_1 \cap B_2) + 1 - P(B_1 \cup B_2)$$

$$= P(B_1)P(B_2) + 1 - (P(B_1) + P(B_1) - P(B_1 \cap B_2)) = 1 + 2P(B_1)P(B_2) - P(B_1) - P(B_2)$$

Donc $P(C) = 1 + 2 \times \frac{5}{9} \times \frac{6}{9} - \frac{5}{9} - \frac{6}{9} = \frac{14}{27}$.

Ainsi, la probabilité pour que les deux boules tirées soient de même couleur est $\frac{14}{27}$.

Probabilités : corrigé

3. Probabilité pour que l'une au moins des boules tirées soit blanche.

Soit B l'évènement : " L'une au moins des boules tirées est blanche ". L'évènement complémentaire $\overline{B}$

est : " Les deux boules tirées sont rouges ", $\overline{B} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$.

$$P(\overline{B}) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1}) \times P(\overline{B_2}) = (1 - P(B_1))(1 - P(B_2)) = (1 - \frac{5}{9})(1 - \frac{6}{9}) = \frac{4}{27}$$

Par conséquent : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$