Généralités sur les fonctions

Exercice 1

On donne trois expressions de l'image $f(x)$ d'un réel x différent de 3 par une fonction f :

$f_1(x) = 1 + \dfrac{7-2x}{x-3}$ $\quad f_2(x) = \dfrac{4-x}{x-3}$ $\quad f_3(x) = -1 + \dfrac{1}{x-3}$

1. Vérifier que ces trois expressions sont égales
2. Dans chacun des cas suivants, choisir l'expression la mieux adaptée et répondre à la question :
   a. Etudier les variations de la fonction f
   b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   c. Pour quelles valeurs de x la courbe représentative de f est-elle au-dessus de la droite d'équation $y = 1$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+3}$

1. Déterminer les réel a et b tel que $f(x)= a + \dfrac{b}{x^2+1}$
2. Montrer que f est majorée par 2

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 4$. $\mathcal{P}$ est la courbe représentative de f

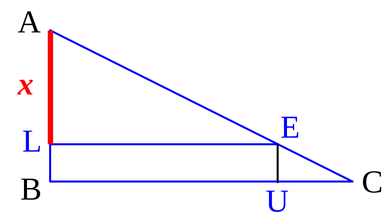
1. Vérifier que $f(x) = (x+3)^2 - 5$
2. Donner la transformation qui permet d'obtenir la courbe $\mathcal{P}$ à partir d'une courbe connue ;
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f

Généralités sur les fonctions

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que AB=6 et BC=12
E étant un point du segment [AC], on considère ses projetés orthogonaux L et U respectivement sur les segments [AB] et [BC] définissant ainsi un rectang le BLEU

On pose AL = x



1. a. Prouver que $\dfrac{AL}{AB} = \dfrac{BU}{BC}$

   b. Calculer l'aire, en fonction de x du rectangle BLEU puis montrer qu'elle peut s'écrire :
$$f(x) = 18 - 2(x-3)^2$$

2. Donner la représentation graphique de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). On prendra pour unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
   On rappelle que la fonction est définie sur [0 ; 6]

3. A l'aide de la représentation graphique, faire une conjecture sur le sens de variations de f puis la prouver .

4. Par le calcul, déterminer les distances AL correspondant à une aire de 10

5. Résoudre, à l'aide d'un tableau de signe, l'inéquation $f(x)>16$

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ et C_f sa la courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$
2. Résoudre $f(x)=0$
3. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x
4. Montrer que pour tout réel x, $f(x) \leqslant 2$
5. Montrer que le point I(-1 ;1) est le centre de symétrie de C_f

Généralités sur les fonctions

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 - 2x + 2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan .

1. Montrer que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est axe de symétrie pour C_f
3. Résoudre $f(x)=0$
4. Montrer que pour tout réel x, $-1 \leq f(x) < 1$

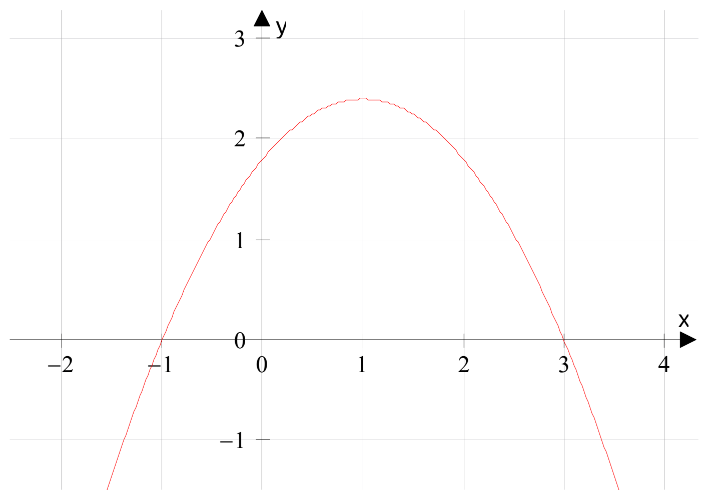
Exercice 7

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et dont la représentation graphique est la parabole tracée partiellement ci-contre

1. Le réel a est-il positif ? pourquoi ?
2. Quel est le signe du discriminant ?
3. Déterminer les réels b et c sachant que $a = -0{,}6$

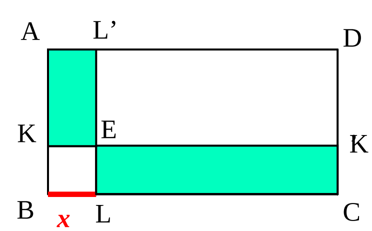


Exercice 8

Soit ABCD un rectangle tel que AB=5 et BC=7 . K est un point de [AB] et L un point de [BC]

Les droites (KK') et (LL') sont parallèles aux côtés du rectangle et définissent le carré BLEK

On pose BL = x



1. Dans quel intervalle varie x ?
2. Exprimer $\boldsymbol{A}$(x), l'aire hachurée en fonction de x
3. Pour quelle valeurs de x cette aire est-elle maximale ?

Généralités sur les fonctions : corrigé

Exercice 1

1 . Pour tout x réel différent de 3 :

$$f_1(x) = 1 + \frac{7-2x}{x-3} = \frac{x-3+7-2x}{x-3} = \frac{4-x}{x-3} = f_2(x)$$

$$f_3(x) = -1 + \frac{1}{x-3} = \frac{-(x-3)+1}{x-3} = \frac{4-x}{x-3} = f_2(x)$$

Les trois expressions sont donc égales

1. a. Soit $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x-3}$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

1. b. L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à lęquation $f_2(x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 4-x=0$ et $x-3 \neq 0$

L'équation $f(x) = 0$ a donc une seule solution : $S = \{4\}$

1. c. Pour trouver les valeurs de x pour lesquelles la courbe représentative de f est au-dessus de la droite d'équation $y = 1$, il faut résoudre l'inéquation $f(x) > 1$, ainsi

$$f(x) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{7-2x}{x-3} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7-2x}{x-3} > 0$$

Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$		3		$3,5$		$+\infty$
$7-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{7-2x}{x-3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

La courbe représentative de f est au-dessus de la droite d'équation $y = 1$ sur lĭntervalle $]3\,;3,5]$.

II. 1. $f(x) = a + \dfrac{b}{x^2+3} = \dfrac{a\left(x^2+3\right)+b}{x^2+3}$

$$= \frac{ax^2+(3a+b)}{x^2+3}$$

Par identification avec l'expression $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+3}$ on obtient $\begin{cases} a = 2 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ on en déduit $\begin{cases} a=2 \\ b=-6 \end{cases}$

Généralités sur les fonctions : corrigé

Exercice 2

1. Pour tout x réel , $f(x) = a + \dfrac{b}{x^2+3} = \dfrac{a\left(x^2+3\right)+b}{x^2+3} = \dfrac{ax^2+(3a+b)}{x^2+3}$

Par identification avec l'expression $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+3}$, on obtient $\begin{cases} a = 2 \\ 3a+b=0 \end{cases}$, on en déduit $\begin{cases} a=2 \\ b=-6 \end{cases}$

Par conséquent, $f(x) = 2 - \dfrac{6}{x^2+3}$

2. Un carré est toujours positif donc x^2+3 est strictement positif,

Par conséquent, pour tous réels x, $\dfrac{1}{x^2+3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-6}{x^2+3} < 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{6}{x^2+3} < 2 \Leftrightarrow f(x) < 2$

Ce qui montre que f est majorée par 2

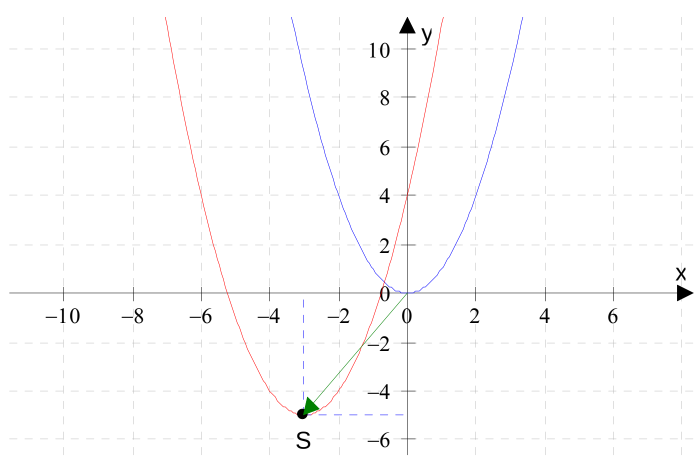
Exercice 3

1. Pour tout x réel , $(x+3)^2 - 5 = x^2 + 6x + 9 - 5 = x^2 + 6x + 4 = (x+3)^2 - 5 = f(x)$

2. L'expression $f(x) = (x+3)^2 - 5$ permet de remarquer que la fonction f est associée à la fonction

« carré », la courbe P se déduit de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ (-3 ; -5)

Le sommet qui était en O(0 ;0) se trouvera en S(-3 ; -5)



2. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-5	↗ $+\infty$

Généralités sur les fonctions : corrigé

Exercice 4

1.a. L appartient à [AB] , E appartient à [AC] et (LE)//(BC) donc d'après le théorème de Thalès , on a : $\frac{AL}{AB}=\frac{AE}{AC}$

De même, en considérant que (EU)//(AB) on a $\frac{AE}{AC}=\frac{BU}{BC}$

Par conséquent $\frac{AL}{AB}=\frac{BU}{BC}$

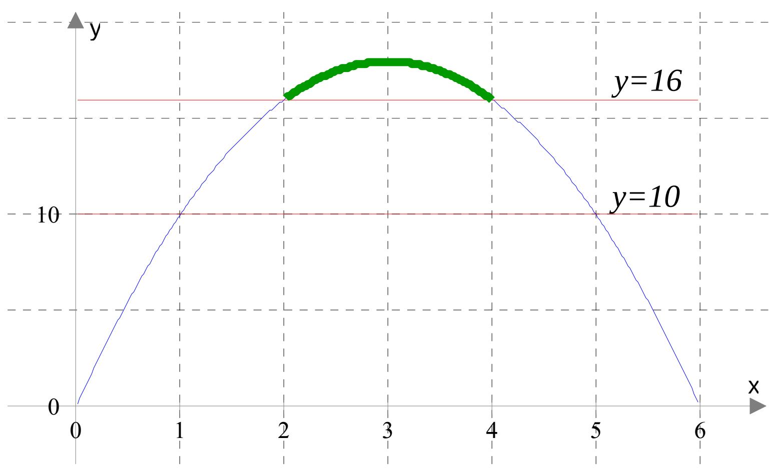
1.b. L'aire du rectangle BLEU vaut $BU\times BL$, or $BL=AB-AL = 6-x$ et $BU=\frac{AL\times BC}{AB}=\frac{12x}{6}=2x$

donc $f(x)=2x(6-x)=12x-2x^2$

Développons : $18-2(x-3)^2=18-2(x^2-6x+9)=18-2x^2+12x-18=-2x^2+12x$

Par conséquent, $f(x)=18-2(x-3)^2$

2. La représentation graphique de f :



3. D'après la courbe, on remarque que la fonction f est strictemnet croissante sur [0 ;3] et strictement décroissante sur [3 ;6]. Prouvons-le :

f est dérivable sur [0 ;6] et on a pour tout x de [0 ;6], $f'(x) = 12 - 4x$

x	0 3 6
$f'(x)$	+ 0 −

D'où le résultat.

Généralités sur les fonctions : corrigé

4. Déterminer les distances AL correspondant à une aire de 10, revient à résoudre lềquation :

$$f(x)=10 \Leftrightarrow 18-2(x-3)^2=10 \Leftrightarrow 8-2(x-3)^2=0 \Leftrightarrow 4-(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2-(x-3)\right)\left(2+(x-3)\right)=0 \Leftrightarrow (5-x)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=5$$

Il faut donc prendre AL=1 ou AL=5 pour avoir une aire de 10

(Ce qui apparait vérifier sur le graphique)

5. $f(x)>16 \Leftrightarrow 18-2(x-3)^2-16>0 \Leftrightarrow 2-2(x-3)^2>0 \Leftrightarrow 2\left(1-(x-3)^2\right)>0$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-(x-3)\right)\left(1+(x-3)\right)>0 \Leftrightarrow 2(4-x)(x-2)>0$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$4-x$		+		+	0	–	
$x-2$		–	0	+		+	
$f(x)-16$		–	0	+	0	–	

Donc l'ensemble de solutions est $S =]2\,;4[$. (Ce qui apparait vérifier sur le graphique)

Exercice 5

1. Calculons le discriminant du dénominateur :

$$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times1\times2 = -4$$

Comme il est négatif le dénominateur ne s'annule jamais et la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

2. Pour tout x réel , $f(x)=1+\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2} = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-2x+2}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Donc lềnsemble de solution est $S = \{-2\}$.

Généralités sur les fonctions : corrigé

3. Pour étudier le signe de $f(x)$, il faut étudier le signe du numérateur et celui du dénominateur :
or nous avons vu à la question 1 que le dénominateur ne s'annulait pas, il garde donc toujours le signe de $a = 1$. Il est résulte que pour tout x réel , $x^2 - 2x + 2 > 0$.
A la question 2, nous avons vu que le numérateur s'écrit : $x^2+4x+4 = (x+2)^2$

x	$-\infty$ $\qquad$ -2 $\qquad$ $+\infty$
x^2+4x+4	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
x^2+2x+2	$+$ $\quad$ $\quad$ $+$
$f(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

4. Pour prouver que 2 est un majorant, étudions le signe de la différence $2 - f(x)$:

Pour tout x réel , on a :

$$2 - f(x) = 2 - \left(1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right) = 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2}{x^2+2x+2} > 0$$

5. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ il est donc symétrique par rapport à -1

$$f(-2-x) = 1 + \frac{2(-2-x)+2}{(-2-x)^2+2(-2-x)+2} = 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$$

par conséquent : $f(-2+x) + f(x) = 1 - \dfrac{2x+2}{x+2x+1} + 1 + \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2} = 2$

On peut donc affirmer que le point I(–1 ; 1) de centre de symétrie pour C_f

Généralités sur les fonctions : corrigé

Exercice 6

1. Le dénominateur est un trinôme du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad = \quad 2^2 - 4\times1\times2 \quad = \quad -4$$

Comme il est strictement négatif le dénominateur ne s'annule jamais et la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

2. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ il est donc symétrique par rapport à 1

Pour tout réel x, on a $f(2-x) = 1 - \dfrac{2}{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2} = 1 - \dfrac{2}{x^2 - 2x + 2} = f(x)$

Par conséquent on peut affirmer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie pour C_f.

3. Remarquons tout d'abord que pour tout x réel,

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2}$$

et que le dénominateur ne s'annulant jamais donc

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Il en résulte que l'ensemble de solutions est S = { 0 ; 2 }

4. On peut écrire $f(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2 + 1}$

Pour tout réel x, on a $(x-1)^2 \geqslant 0$ D'où $(x-1)^2 + 1 \geqslant 1$

Ou encore $0 < \dfrac{1}{(x-1)^2 + 1} \leqslant 1$ et en multipliant par -2 $0 > \dfrac{-2}{(x-1)^2 + 1} \geqslant -2$

puis en ajoutant 1 $1 > 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2 + 1} \geqslant -1$

Nous avons donc prouver que pour tout réel x, $-1 \leq f(x) < 1$

Généralités sur les fonctions : corrigé

Exercice 7

1. Le réel n'est pas positif mais négatif car la parabole est tournée vers le bas.
2. La parabole coupe l'axe des abscisses deux fois, ce qui signifie que le trinôme a deux racines

Le discriminant est donc strictement positif

3. *Il faut penser à utilise la forme factorisée :*

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ =-0,6(x-(-1))(x-3)\ =-0,6(x+1)(x-3)=-0,6\left(x^2-2x-3\right)$$

Donc pour tout x réel , $f(x)=-0,6x^2+1,2x+1,8$

Exercice 8

1. x est une longueur qui est inférieure à AB et à BC donc $x\in[0\ ;\ 5\ ]$

2. L'aire hachurée vaut : $A(x)=\text{LE}\times\text{LC}\ +\ \text{UE}\times\text{UA}=x(7-x)+x(5-x)=-2x^2+12x$

3. Pour obtenir le maximum, il faire étudier les variations de la fonction *A*, il faut écrire *A*(x)

sous forme canique :

$$\boldsymbol{A}(x)=-2x^2+12x\quad=-2(x^2-6x)\ =-2\left((x-3)^2-9\right)=-2(x-3)^2+18$$

On en déduit que la courbe représentative de *A* est l'image de la parabole d'équation $y=-2x^2$ par la

translation de vecteur $\vec{u}$ (3 ;18). On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		3		5
$A(x)$	0	↗	18	↘	10

L'aire maximale est de 18 et elle est obtenue pour x = 3