Dénombrement

Exercice 1

Une télévision privée décide d'opter pour le système de « programmes à péage » en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres.

a) Donner le nombre d'abonnés potentiels puis le nombre d'abonnés avec code composés de huit chiffres différents.

b) Calculer le nombre de codes à 2 chiffres différents, l'un étant utilisé 1 fois et l'autre 7 fois.

c) Même question avec 3 chiffres différents, dont 2 sont utilisés une fois et le troisième 6 fois.

Exercice 2

Neuf personnes se présentent à la médecine du travail pour passer la visite annuelle. Deux médecins les reçoivent. Le premier verra 5 personnes, le second 4.

1. De combien de façons différentes les neuf personnes peuvent-elles être réparties entre chaque médecin ?

2. Il y a 4 personnes portant des lunettes. De combien de façons différentes peut-on réaliser cette répartition, sachant que chaque médecin verra 2 personnes portant des lunettes ?

3. De plus, on veut que M. Fadi qui porte des lunettes et M. Chadi qui n'en porte pas, soient examinés par le même médecin. Combien de répartitions sont possibles ?

Exercice 3

L'épreuve orale d'un concourt de recrutement à une banque est organisée en lots de 3 sujets tirés au sort parmi 80 sujets . Le candidat doit traiter un des sujets de son choix.

1°/ Combien d'épreuves différentes peut-on organiser ?

2°/ Un candidat se présente en n'ayant révisé que 50 sujets.

Quel est le nombre de façons de traiter :

a) les 3 sujets,
b) deux sujets,
c) un sujet,
d) aucun sujet.

3°/ Combien de sujets un étudiant doit-il réviser pour avoir orgaliser 816 épreuves différentes ?

Dénombrement : corrigé

SOLUTION 1.

a). Un abonné potentiel correspond à un code possible, c'est-à-dire à une suite de huit chiffres, chacun étant pris parmi les 10 chiffres possibles { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }.

Il y a 10 façons de choisir le premier chiffre, 10 façons de choisir le deuxième chiffre, etc., 10 façons de choisir le huitième chiffre, soit au total 10^8 façons de choisir un code.

Il y a donc 10^8 abonnés potentiels ayant chacun un code différent.

Un abonné avec code composé de huit chiffres différents correspond à une suite de huit chiffres différents correspond à une suite de huit chiffres différents pris parmi les dix chiffres possibles { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }. Il y a 10 façons de choisir le premier chiffre, 9 façons de choisir le deuxième chiffre, etc., 3 façons de choisir le huitième chiffre, soit au total

$\frac{10\,!}{(10-8)\,!} = 10 \times 9 \times \ldots \times 3 = 1814\,400$ façons de choisir un code.

b) Il y a $A_{10}^{2} = \frac{10\,!}{(10-2)\,!} = 90$ façons de choisir deux chiffres différents parmi les dix chiffres différents parmi les dix chiffres possibles, lorsque le premier chiffre n'apparaîtra qu'une fois et premier chiffre n'apparaîtra qu'une fois et le deuxième chiffre sept fois. Pour chaque choix de deux chiffres différents, le premier chiffre peut occuper l'une quelconque des $C_8^1 = 8$ places dans le code, d'où le nombre de codes de deux chiffres différents, l'un utilisé une seule fois et l'autre sept fois : $A_{10}^{2} \times C_8^1 = \frac{10!}{8!} \times 8 = 720$

c) Il y a $A_{10}^{3} = 720$ façons de choisir le chiffre qui sera utilisé 6 fois et les deux chiffres qui sera utilisé 6 fois et les deux chiffres qui ne seront utilisés qu'une fois. Pour chaque choix de trois chiffres, le deux chiffres qui ne sont utilisés qu'une fois peuvent être placés de $C_8^2 = 28$ façons dans le code. Il y a donc au total $A_{10}^{3} \times C_8^2 =$ 20 160 codes possibles de ce type.

Dénombrement : corrigé

SOLUTION 2.

1. Il y a C_9^4 = 126 façons de choisir 4 personnes parmi les 9, et C_2^1 = 2 façons de choisir le médecin qui recevra 4 personnes, soit, au total, $C_9^4 \times C_2^1$ = 252 façons de répartir les 9 personnes en groupes de 4 et de 5 entre les médecins.

2. Il y a C_2^1 = 2 façons de choisir le médecin qui recevra 4 personnes. Parmi les 4 personnes à lunettes, il y a C_4^2 = 6 façons d'en choisir 2 pour le médecin qui recevra 4 personnes.

Parmi les 5 personnes sans lunette, il y a C_5^2 = 10 façons de choisir les 2 autres personnes qui qui recevra 4 personnes. Il y a donc au total : $C_2^1 \times C_4^2 \times C_5^2 = 2 \times 6 \times 10 = 120$ façons dont les 2 médecins peuvent voir chacun deux personnes à lunettes.

3. Si M. Fadi, à lunettes, et M. Chadi, sans lunettes, sont vus par le médecin qui voit 4 malades, dont 2 à lunettes, il y a C_3^1 = 3 façons de choisir un autre patient à lunettes et C_4^1 = 4 façons de choisir un autre patient sans lunettes, soit $C_3^1 \times C_4^1$ = 12 façons de choisir un groupe de 4 personnes dont 2 à lunettes, contenant messieurs Fadi et Chadi.

Si Mrs. Fadi, à lunettes, et Chadi, sans lunettes, sont vus par le médecin qui voit 5 malades , dont 2 à lunettes, il y a C_3^1 = 3 façons de choisir un autre patient à lunettes et C_4^2 = 6 façons de choisir un autre patient sans lunettes, soit $C_3^1 \times C_4^2$ = 18 façons de choisir un groupe de 5 personnes dont 2 à lunettes, contenant Mrs. Fadi et Chadi.

Comme, par ailleurs, il y a 2! = 2 façons, pour les médecins de se répartir les groupes de 4 et 5 personnes, cela fait au total : 2! (12 + 18) = ***60 façons*** dont MM Durand et Dupond peuvent être examinés ensemble.

Dénombrement : corrigé

SOLUTION 3.

1. C'est le nombre de façons de choisir 3 sujets parmi 80, sans tenir compte de l'ordre :

$$C_{80}^{3} = 82\ 160$$

2. a) Le nombre de cas favorables est le nombre des combinaisons des 50 sujets révisés, 3 à 3 :

$C_{50}^{3} = 19\ 600.$

b) Le nombre de cas favorables est $C_{50}^{2} \times C_{30}^{1} = 1225 \times 30 = 36750.$

c) Le nombre de cas favorables est $C_{50}^{1} \times C_{30}^{2} = 50 \times 435 = 21750.$

d) Le nombre de cas favorables est $C_{30}^{3} = 4060.$

3. Soit x le nombre de sujets à réviser : on doit avoir $C_{80-x}^{3} \approx 816.$

Or $C_{18}^{3} = 816$, soit ***x = 62***