Arithmétique (3)

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Établir que $a_n = 2n + 5$ et $b_n = n + 2$ sont premiers entre eux.
2. En déduire $\text{pgcd}\left(2n^2 + 7n + 5; n^2 + 3n + 2\right)$ *(indication : on pourra penser à une factorisation).*

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $\text{pgcd}(4n + 1; 5n + 3)$ (suivant les valeurs de n).

Exercice 3

Soit n un entier naturel tel que $n > 10$. On pose : $\mathrm{F} = \dfrac{n+13}{n-10}$

1. Déterminer deux entiers naturels α et β tels que : $\mathrm{F} = \alpha + \dfrac{\beta}{n-10}$
2. Déterminer les valeurs de n telles que F soit entier.
3. Déterminer les valeurs de n telles que la fraction $\dfrac{n+13}{n-10}$ soit réductible.

Exercice 4

Soit n un entier naturel.
Le reste dans la division euclidienne de $a = 7857$ par n est 3.
Le reste dans la division euclidienne de $b = 6549$ par n est 11.

Quel est cet entier n ?

Arithmétique (3)

correction

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $$\begin{aligned} \text{pgcd}(2n+5;n+2) &= \text{pgcd}((2n+5)-2(n+2);n+2) \quad \text{en appliquant le lemme d'Euclide} \\ &= \text{pgcd}(1;n+2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

   On peut aussi rédiger ainsi :
   Soit d un diviseur (positif) commun à $2n+5$ et $n+2$.
   d divise les CLCE de $2n+5$ et $n+2$, en particulier d divise $(2n+5)-2(n+2)=1$. Donc $d=1$ et $\text{pgcd}(2n+5;n+2)=1$.

   On peut aussi écrire : $a_n - 2b_n = 1$ donc a_n et b_n sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

2. $$\begin{aligned} \text{pgcd}\left(2n^2+7n+5;n^2+3n+2\right) &= \text{pgcd}((2n+5)(n+1);(n+2)(n+1)) \\ &= (n+1)\times\text{pgcd}(2n+5;n+2) \quad \text{en tenant compte du caractère positif de } n+1 \\ &= (n+1) \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(4n+1;5n+3) &= \text{pgcd}(4n+1;(5n+3)-(4n+1)) \quad \text{(lemme d'Euclide)} \\ &= \text{pgcd}(4n+1;n+2) \\ &= \text{pgcd}((4n+1)-4(n+2);n+2) \quad \text{(lemme d'Euclide)} \\ &= \text{pgcd}(7;n+2) \end{aligned}$$

Comme 7 est premier, on en déduit :

$$\text{pgcd}(4n+1;5n+3) = \begin{cases} 7 \text{ pour } n \text{ tel que } n+2 \equiv 0 \pmod 7 \\ 1 \text{ pour } n \text{ tel que } n+2 \not\equiv 0 \pmod 7 \end{cases}$$

reste de n dans la division par 7	0	1	2	3	4	5	6
$\text{pgcd}(4n+1;5n+3)$	1	1	1	1	1	7	1

On peut aussi rédiger ainsi : le pgcd δ de $4n+1$ et $5n+3$ divise les CLCE de $4n+1$ et $5n+3$, en particulier divise $4(5n+3)-5(4n+1)=7$. δ divise 7, donc (7 étant premier) δ vaut 1 ou 7. On poursuit le raisonnement comme ci-dessus.

Arithmétique (3)

correction

Exercice 3

1. $$F = \frac{n+13}{n-10} = \frac{n-10+23}{n-10} = \frac{n-10}{n-10} + \frac{23}{n-10} = 1 + \frac{23}{n-10}$$

2. $$\begin{aligned} F \text{ entier} &\Longleftrightarrow n-10 \text{ divise } 23 \\ &\Longleftrightarrow n-10 \in \{1;23\} \text{ (en tenant compte de } n-10 \geqslant 0) \\ &\Longleftrightarrow n \in \{11;33\} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \text{pgcd}\,(n+13; n-10) &= \text{pgcd}\,((n+13)-(n-10); n-10) \text{ (lemme d'Euclide)} \\ &= \text{pgcd}\,(23; n-10) \end{aligned}$$

Comme 23 est premier :

$$\text{pgcd}\,(n+13; n-10) = \begin{cases} 23 \text{ pour } n \text{ tel que } \quad 23 \text{ divise } n-10 \\ 1 \text{ pour } n \text{ tel que } \quad 23 \text{ ne divise pas } n-10 \end{cases}$$

La fraction est réductible lorsque n est de la forme $10+23k$, k entier.

Exercice 4

Soit n un entier naturel.

Le reste dans la division euclidienne de $a = 7857$ par n est 3, n divise donc $7857 - 3 = 7854$.

Le reste dans la division euclidienne de $b = 6549$ par n est 11, n divise donc $6549 - 11 = 6538$.

L'entier n, diviseur commun de 7854 et de 6538, est un diviseur de leur pgcd ; c'est à dire de 14. L'entier naturel n est donc 1, 2, 7 ou 14.

Comme l'un des restes obtenus est 11, l'entier n est strictement plus grand que 11 : $n = 14$.