Arithmétique (2)

Exercice 1

Montrer que, pour tout entier naturel n , $n^3 - n$ est divisible par 6.

Exercice 2

Soient a et b des entiers. Montrer que $(a+2b)^4 - a^4$ est divisible par 8.

Exercice 3

Soient a, b et d trois entiers naurels non nul .

Vérifier que : $a^2 - (a+b)a + ab = 0,$

En déduire que si d divise ab et a + b, alors d divise a^2.

Exercice 4

Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

1. Montrer que P.G.C.D (11a+ 5 b; 13a + 6 b) = 1.

2. On suppose de plus que a > b , montrer que P.G.C.D $(a^3 - b^3, a^2 - b^2)$=a-b.

Exercice 5

1. Déterminer les entiers a, bet c tels que pour toutnetier naturel n , on ait :

$$(n+2)(5n^2 - 10n + 19) - 38 = (5n^3 - n).$$

2. En déduire que pour tout entier n , $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$.

Quelles sont les valeurs possibles de $d = (5n^3 - n) \wedge (n+2)$?

3. Résoudre $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$.

Arithmétique (2): corrigé

Exercice 1

Raisonnons par récurrence :

0^3 - 0 = 0 donc divisible par 6

Supposons que $n^3 - n$ est divisible par 6 et montrons que $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 6.

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= n^3+3n^2+3n+1-n-1 = n^3+3n^2+2n\\ &= n^3-n+3(n^2+n) = n^3-n+3n(n+1).\end{aligned}$$

Par hypothèse $(n^3 - n)$ est divisible par 6. De plus, $3n(n+1)$ est divisible par 6 car c'est le produit de deux entiers consecutifs : si l'un est pair, l'autre impair .

Donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 2

$$(a+2b)^4-a^4 = ((a+2b)^2+a^2)((a+2b)^2-a^2) = 8\,b(a^2+2ab+2b^2)(a+b).$$

IL suffit alors de conclure.

Exercice 3

Les nombres a et b sont solutions de l' équation $x^2-(a+b)x+ab=0.$

Donc, on a $a^2-(a+b)a+ab=0,$

Puisque d divise à la fois ab et $a+b$, il existe deux entiers k et k' tels que

$ab=kd$ et $a+b=k'd.$

c'est- a-dire $a^2=(a+b)a-ab,$ soit encore $a^2=d(k'a-k).$

Par suite : d divise a^2.

Arithmétique (2): corrigé

Exercice 4

1. Lorsque n est plus grand que m, on a PGCD $(m,n) = $ PGCD $(m, n-m)$.

Donc PGCD $(11a+5b, 13a+6b)$ $=$ PGCD $(11a+5b, 2a+b)$

$=$ PGCD $(9a+4b, 2a+b)$ $=$ PGCD $(7a+3b, 2a+b)$

$=$ PGCD $(5a+2b, 2a+b)$ $=$ PGCD $(3a+b, 2a+b)$

$=$ PGCD $(a, 2a+b)$ $=$ PGCD$(a, a+b)$

$= 1.$

2. Calculons PGCD (a^3-b^3, a^2-b^2)

$$\text{PGCD}(a^3-b^3, a^2-b^2) = \text{PGCD }[(a-b)(a^2+ab+b^2), (a-b)(a+b)]$$

$$= (a-b)\ \text{PGCD}(a^2+ab+b^2, a+b)$$

$$= (a-b)\ \text{PGCD}(a^2+(a+b)b, a+b)$$

$$= (a-b)\ \text{PGCD}(a^2, a+b)$$

Supposons que pgcd $(a^2, a+b) \neq 1$, alors il existe un nombre premier facteur de PGCD $(b^2, a+b)$ tel que p divise à la fois a^2 et $(a+b)$. Si

Si p divise a^2, alors p divise a. Mais comme p divise $(a+b)$, il doit diviser b

Donc p divise à la fois a et b, c'est-à-dire PGCD $(a,b) \neq 1$.

Ce qui est impossible car PGCD$(a,b) = 1$.

Donc PGCD $(a^3-b^3, a^2-b^2) = a-b$.

Arithmétique (2): corrigé

Exercice 5

1. Pour tout entier naturel n , on a :

$$(n+2)(an^2 + bn + c) - 38 = 5n^3 - n$$

$$\Leftrightarrow \quad an^3 + (2a+b)n^2 + (c+2b)n + 2c - 38 = 5n^3 - n$$

D'où par identification : $\begin{cases} a=5 \\ 2a+b=0 \\ c+2b=-1 \\ 2c-38=0 \end{cases}$ on obtient $\begin{cases} a=5 \\ b=-10 \\ c=19 \end{cases}$:

2. On a $(n+2)(5n^2-10n+19)-38=(5n^3-n)$.

   Cette écriture nous permet de dire que tout diviseur commun à $(5n^3-n)$ et $(n+2)$ est diviseur commun à $(n+2)$ et 38.

   Réciproquement, tout diviseur commun à $(n+2)$ et 38 est diviseur commun à $(5n^3-n)$ et $(n+2)$.

   Il vient donc PGCD $(5n^3-n,\ n+2)$ = PGCD $(n+2,\ 38)$.

   Comme d doit diviser 38, les valeurs possibles de d sont $1, 2, 19$ et 38.

3. D'après la question précédente, résoudre pgcd $(5n^3-n,\ n+2)=19$ revient à résoudre pgcd $(n+2,\ 38)=19$. Cela veut dire qu'il existe des entiers p et q tels que $n+2=19p$ et $38=19q$ avec p et q premiers entre eux. Il est clair que q est pair. Le fait que p et q sont premiers entre eux impose que p est impair.

   Donc n est de la forme $n=19(2k+1)-2$, avec k entier naturel.