Arithmétique (1)

Exercice 1

Déterminer les entiers naturels n tels que n + 2 divise 5n + 19.

Exercice 2

Montrer qu'il existe un seul entier naturel n pour lequel la fraction $\frac{n+17}{n+4}$ est entière.

Exercice 3

Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - 4b^2 = 20$.

Exercice 4

Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturel tels que $\begin{cases} a > b \\ a^2 - b^2 = 2004 \\ a \wedge b = 2 \end{cases}$.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n non nul, on pose a = $n^3 + 3n^2 + 2n - 4$ et b = $n^2 + 2n - 1$.

1. Déterminer deux entiers naturels α et β tels que a = $b(\alpha n + \beta) + n - 3$.
2. En déduire suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de a par b.
3. On suppose que n > 3, démontrer que : $a \wedge b = (n-3) \wedge 14$.
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $a \wedge b = 7$.

Arithmétique (1) : corrigé

Exercice 1 :

Pour tout entier naturel n , $5n+19=5\left(n+2\right)+9$

Il en résulte que : (n + 2) divise (5n + 19) $\Leftrightarrow$ (n + 2) divise 9.

Comme les diviseurs de 9 sont 1 , 3 et 9 et n + 2 > 1 alors n + 2 = 3 ou n + 2 = 9.

D'où n = 1 ou n = 7.

Exercice 2 :

On a n + 17 = n + 4 + 13 donc , pour tout entier naturel n , $\frac{n+17}{n+4}=\frac{n+4+13}{n+4}=1+\frac{13}{n+4}$.

Pour que la fraction $\frac{n+17}{n+4}$ soit un entier, il faut et il suffit que n + 4 divise 13.

Or les diviseurs de 13 sont 1 et 13 alors :

- n + 4 = 1 : ce qui est impossible,
- n + 4 = 13 $\Leftrightarrow n=9$

Par suite, n = 9 est le seul entier naturel tel que $\frac{n+17}{n+4}=\frac{9+17}{13}=\frac{26}{13}=2$.

Exercice 3 :

$a^2-4b^2=20\Leftrightarrow\left(a-2b\right)\left(a+2b\right)=20$.

Donc : a - 2b < a + 2b et (a - 2b , a + 2b) est un couple de diviseurs positifs de 20.

Or $20=1\times20=2\times10=4\times5$ alors $\begin{cases}a-2b=1\\a+2b=20\end{cases}$ ou $\begin{cases}a-2b=2\\a+2b=10\end{cases}$ ou $\begin{cases}a-2b=4\\a+2b=5\end{cases}$.

D'autre part : (a - 2b) + (a + 2b) = 2a donc cette est paire.

Par conséquent, le seul système pouvant donner des solutions est $\begin{cases}a-2b=2\\a+2b=10\end{cases}$.

$$\begin{cases}a-2b=2\\a+2b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=12\\4b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}.$$

Arithmétique (1) : corrigé

Exercice 4 :

Si $a \wedge b = 2$ alors il existe deux entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que :

a = 2a' et b = 2b'.

Ainsi : $a^2 - b^2 = 2008$ devient $4\left(a'^2 - b'^2\right) = 2008 \Leftrightarrow a'^2 - b'^2 = 502 \Leftrightarrow (a'-b')(a'+b') = 502$

Les diviseurs de 502 sont 1, 2 , 251 et 502.

On sait que a > b donc a' > b' et on sait aussi que a' – b' < a' + b'.

Les entiers a' – b' et a' + b' sont de même parité (c'est-à-dire les deux sont pairs ou les deux sont impairs).

Les couples (a', b') sont donc solutions de l'un des systèmes

(S_1) : $\begin{cases} a'+b' = 502 \\ a'-b' = 1 \end{cases}$ ou (S_2) : $\begin{cases} a'+b' = 251 \\ a'-b' = 2 \end{cases}$ (ce qui est impossible)

Donc le système $\begin{cases} a > b \\ a^2 - b^2 = 2004 \\ a \wedge b = 2 \end{cases}$ n'admet aucune solution.

Exercice 5 :

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

   a = $b(\alpha n + \beta) + n - 3 \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 2n - 4 = \left(n^2 + 2n - 1\right)(\alpha n + \beta) + n - 3$

   $\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 2n - 4 = \alpha n^3 + (\beta + 2\alpha)n^2 + (2\beta - \alpha + 1)n - \beta - 3$

   D'où et par identification :

   $$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 2\alpha = 3 \\ 2\beta - \alpha + 1 = 2 \\ -\beta - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

2. Si n > 3 : n – 3 est donc un entier.

   $\left(n^2 + 2n - 1\right) - (n - 3) = n^2 + n + 2 \geq 2$ donc $n^2 + 2n - 1 > n - 3$.

   Par conséquent, le reste de la division euclidienne a par b est (n – 3).
   Si n = 1 alors a = 2 et b = 2 , donc le reste de la division euclidienne a par b est 0.
   Si n = 2 alors a = 20 et b = 7 , donc le reste de la division euclidienne a par b est 6.
   Si n = 3 alors a = 56 et b = 14 , donc le reste de la division euclidienne a par b est 0.

Arithmétique (1) : corrigé

3. On suppose que n > 3.
   L'égalité a = $b(n+1)+n-3$ permet d'affirmer que :
   $a\wedge b = b\wedge(n-3) = (n^2+2n-1)\wedge(n-3)$.

Cherchons deux entiers α' et β' tels que :
pour tout $n>3$, $n^2+2n-1=(n-3)(\alpha' n+\beta')+14$

$$n^2+2n-1=(n-3)(\alpha' n+\beta')+14=\alpha' n^2+(\beta'-3\alpha')n-3\beta'+14$$

D'où et par identification :

$$\begin{cases}\alpha'=1\\ \beta'-3\alpha'=2\\ -3\beta'+14=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha'=1\\ \beta'=5\end{cases}$$

Par suite, pour tout $n>3$, $n^2+2n-1=(n-3)(n+5)+14$.

Donc $a\wedge b=(n^2+2n-1)\wedge(n-3)=(n-3)\wedge 14$.

4. $a\wedge b=7 \Leftrightarrow (n-3)\wedge 14=7 \Leftrightarrow n-3$ est divisible par 7
   $\Leftrightarrow$ il existe un entier impair k tel que $n-3=7k$
   En posant k = 2p + 1 avec $p\in\mathbb{N}$, on obtient $n=14p+10$.