Exercice 1:

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2n+1}{3^n}$ et $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

1. a) Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers un réel ℓ.

   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente et calculer sa limite.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = 1 + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \ldots + \frac{2n+1}{3^n}$.

   a) Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ en fonction de n.

   b) Montrer que $S_n = 2 - \frac{1}{2\ 3^{n-1}} - \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \geq 2$.

   c) Prouver que (S_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

3. Soit x un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = (2n+1)(\tan x)^n$.

   a) On suppose que x appartient à $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que (a_n) est divergente.

   b) On suppose que $x = \frac{\pi}{4}$. Etudier la convergence de (a_n) et celle de la suite (b_n) définie par

   $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n^2+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3. Soit (v_n) la suite définie pour n de $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b) Calculer la limite de (v_n).

   c) Calculer u_n en fonction de n .

Exercice 3:

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 3} + 3u_n}{3u_n^{\ 2} + 1} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) est convergente.

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a) Montrer que pour tout entier n, on a : $v_{n+1} = v_n^{\ 3}$.

   b) En déduire que : $v_n = (v_0)^{3^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

   a) Montrer que pour tout entier n, on a : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3^n} \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3n}$.

   b) Montrer que (S_n) est croissante.

   c) Montrer que pour tout entier n, on a $\dfrac{1}{3} \leq S_n \leq 2\left[1 - \dfrac{1}{3^{3(n+1)}}\right]$.

   d) Montrer que (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4:

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$ pour tout $n > 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

2. Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^n}$.

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \dfrac{2}{2^1} + \dfrac{3}{2^2} + \dots + \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Montrer que $S_n = - u_n + 4\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = n(\sin x)^{n-1}$ où x est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

a) Montrer que $0 < v_n \leq u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $v_{n+1} = (\sin x)v_n + (\sin x)^n$

c) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = 1 + 2\sin x + 3(\sin x)^2 + \ldots + n(\sin x)^{n-1}$.

Démontrer que : $T_n(1 - \sin x) = -(\sin x)V_n + \frac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x}\ \frac{1-\sin^n x}{1-\sin x}$.

En déduire la limite de la suite (T_n).

Exercice 1:

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$.

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+3}{3^{n+1}} - \dfrac{2n+1}{3^n} = \dfrac{-4n}{3^{n+1}} \leq 0$

Donc la suite (u_n) décroissante.

D'autre part, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0, il en résulte que la suite (u_n) est converge vers un réel ℓ.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{3}u_{n+1} = \dfrac{2}{3^{n+2}}$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$

donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$ d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Comme $\dfrac{1}{3} \in \left]-1,1\right[$ alors la suite (v_n) est converge vers 0.

2. Pour tout $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$

a) Pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = v_1 \dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{n-1}}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$.

b) On a : pour tout entier k, $v_k = u_{k+1} - \dfrac{1}{3}u_k$, donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{k=2}^{n} u_k - \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k - u_n\right)$$

donc $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = -u_1 + S_n - \dfrac{1}{3} S_n + \dfrac{1}{3} u_n$.

$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = -u_1 + \dfrac{2}{3} S_n + \dfrac{1}{3} u_n$. Ainsi : $\dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right) = -1 + \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}S_n \Leftrightarrow 2S_n = 4 - \dfrac{1}{3^{n-1}} - u_n$

et par suite $S_n = 2 - \dfrac{1}{2\ 3^{n-1}} - \dfrac{1}{2}u_n$.

3. a) Pour tout $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\operatorname{tg} x > 1$ donc $(\operatorname{tg} x)^n > 1$ et par suite $a_n > 2n + 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

b) Si $x = \dfrac{\pi}{4}$ alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = (2n+1)(\tan x)^n = 2n + 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Pour tout entier n, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n^2+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$. Or $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ est la somme des (n + 1) premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1 donc

$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)\frac{1+2n+1}{2} = (n+1)^2$. Il en résulte que pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$.

Exercice 2 :

1. $u_2 = \frac{3}{4}u_1 = \frac{3}{8}$; $u_3 = \frac{4}{6}u_2 = \frac{1}{4}$ et $u_4 = \frac{5}{8}u_3 = \frac{5}{32}$.

2. a) On a : $u_2 = \frac{3}{4}u_1$ et $u_2 = \frac{3}{8}$ donc $0 \le u_2 \le u_1$

On suppose que pour un certain rang n ≥ 2, $0 \le u_{n+1} \le u_n$

et on montre que $0 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

On a $u_{n+2} = \frac{n+2}{2n+2}u_{n+1}$ et $u_{n+1} \ge 0$ donc $u_{n+2} \ge 0$

D'autre part $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{n+2}{2n+2}u_{n+1} - u_{n+1} = \frac{-n}{2n+2}u_{n+1} \le 0$ donc $u_{n+2} \le u_{n+1}$.

Ainsi : $0 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

D'où pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $0 \le u_{n+1} \le u_n$.

b) On a (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente .

Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Il en résulte que $\ell = \frac{1}{2}\ell \Leftrightarrow \ell = 0$

3. a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 = \frac{1}{2}$.

On a donc , pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{2^n}$.

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{n}=v_n \Leftrightarrow u_n = n v_n \Leftrightarrow u_n=\frac{n}{2^n}$.

Exercice 3:

1. a) On a $u_0=2$ donc $u_0 \geq 1$.

On suppose que pour un certain rang n dans $\mathbb{N}^*$ on a $u_n \geq 1$ et on montre que $u_{n+1} \geq 1$.

$u_{n+1}-1=\frac{u_n^3+3u_n}{3u_n^2+1}-1=\frac{(u_n-1)^3}{3u_n^2+1} \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 1$.

On conclue que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3+3u_n}{3u_n^2+1}-u_n=\frac{-2u_n(u_n^2-1)}{3u_n^2+1}=\frac{-2u_n(u_n-1)(u_n+1)}{3u_n^2+1}$.

Comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$ alors $u_{n+1}-u_n \leq 0$ d'où la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc (u_n) est convergente.

2. a) Pour tout entier naturel n , $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{(u_n-1)^3}{3u_n^2+1}}{\frac{(u_n+1)^3}{3u_n^2+1}}=\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right)^3=v_n^3$

b) On a : $(v_0)^{3^0}=(v_0)^1=v_0$

On suppose que pour un certain rang n , $v_n=(v_0)^{3^n}$ et on montre que $v_{n+1}=(v_0)^{3^{n+1}}$

$v_{n+1}=(v_n)^3=\left[(v_0)^{3^n}\right]^3=(v_0)^{3^n\times 3}=(v_0)^{3^{n+1}}$.

Par suite, pour tout entier naturel n, $v_n=(v_0)^{3^n}$.

c) Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ alors $\ell \geq 1$.

D'autre part $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x)=\frac{x^3+3x}{3x^2+1}$ et comme f est continue sur $[1,+\infty[$ d'où f est continue en ℓ alors $\ell=f(\ell) \Leftrightarrow \ell^3+3\ell=3\ell^3+\ell \Leftrightarrow 2\ell^3-2\ell \Leftrightarrow \ell(\ell-1)(\ell+1)=0$.

Il en résulte que $\ell=1$.

Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n-1}{u_n+1}=0$.

2. a) On a : $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^0}=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{3\times 0}=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^0} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3\times 0}$.

On suppose que $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3(n+1)}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3n} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n+1} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1}$$

or $0 \le \frac{1}{3} \le 1$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n \times 3} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n+1}$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3(n+1)}$.

Par suite , pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = v_{n+1} \ge 0$ donc la suite (S_n) est croissante.

c) La suite (S_n) est croissante donc (S_n) est minorée par son premier terme $S_0 = v_0 = \frac{1}{3}$.

D'autre part, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{3^k}$ il en résulte que $S_n \le \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{3k}$.

Or $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{3k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{27}\right)^{k} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{27}} = \frac{27}{26}\left[1-\left(\frac{1}{27}\right)^{n+1}\right] = \frac{27}{26}\left[1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right] \le 2\left[1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right]$

Par conséquent, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n \le 2\left[1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right]$.

On conclue que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \le S_n \le 2\left[1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right]$.

d) On en déduit que pour tout entier n , $S_n \le 2\left[1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right] \le 2$. IL en résulte que (S_n) est croissante et majorée par donc la suite (S_n) est convergente .

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, Comme $\frac{1}{27} \in \left]-1,1\right[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left[1-\frac{1}{3^{3(n+1)}}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{27}\right)^{n+1}\right] = 2$

Par conséquent $\frac{1}{3} \le \ell \le 2$.

Exercice 4:

On a pour tout n > 0 : $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

1. Pour tout entier n non nul, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{2^n} - \dfrac{n}{2^{n-1}} = \dfrac{1-n}{2^n} \leq 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

Or pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}} > 0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

Il en résulte que la suite (u_n) est convergente.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^n} = \dfrac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^n}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}$

On en déduit que $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}$.

Comme $\dfrac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \dfrac{2}{2^1} + \dfrac{3}{2^2} + \ldots + \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

On a , pour tout $k \geq 1$, $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k + \dfrac{1}{2^k}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{k+1} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k}$

D'où : $-u_1 + u_{n+1} + S_n = \dfrac{1}{2}S_n + \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}S_n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$ ou encore $\dfrac{1}{2}S_n = u_1 - u_{n+1} + 1 - \dfrac{1}{2^n}$

Or $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^n}$ donc $\dfrac{1}{2}S_n = -\dfrac{1}{2}u_n + 2 - \dfrac{2}{2^n}$

d'où $S_n = -u_n + 4 - \dfrac{4}{2^n} = -u_n + 4\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 4$.

4. a) On a $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$ donc $0 < \sin x < \dfrac{1}{2}$ d'où pour tout de $\mathbb{N}^*$, $0 < (\sin x)^{n-1} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Il en résulte que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < n(\sin x)^{n-1} \leq \dfrac{n}{2^{n-1}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < v_n \leq u_n$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il suit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = (n+1)(\sin x)^n = n(\sin x)^n + (\sin x)^n = \sin x.n(\sin x)^n + (\sin x)^n$

$$= (\sin x)v_n + (\sin x)^n$$

c) Soit $T_n = 1 + 2\sin x + 3(\sin x)^2 + \ldots + n(\sin x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} V_k$, pour n de $\mathbb{N}^*$.

On a , pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$, $v_{k+1} = (\sin x)v_k + (\sin x)^k$

Donc $\sum\limits_{k=1}^{n} v_{k+1} = \sin x.\sum\limits_{k=0}^{n} v_k + \sum\limits_{k=0}^{n} (\sin x)^k$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=2}^{n+1} V_k = \sin x \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} + (\sin x)T_n$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} V_k - V_1 + V_{n+1} = \sin x \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} + (\sin x)T_n$

$\Leftrightarrow T_n - V_1 + V_{n+1} = \sin x \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} + (\sin x)T_n$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)T_n = \sin x \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} + V_1 - V_{n+1}$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)T_n = \sin x \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} + 1 - V_n.\sin x - (\sin x)^n$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)T_n = [1 + \dfrac{\sin x}{1-\sin x}](1-\sin^n x) - V_n .\sin x$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)T_n = \dfrac{1-\sin^n x}{1-\sin x} - V_n.\sin x$

D'où on a : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(1-\sin x)T_n = \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} - (\sin x)v_n$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sin x)T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x} - (\sin x)\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\sin x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\subset]-1,1[$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin x)^n = 0$ Donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sin x)T_n = \dfrac{1}{1-\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{1}{(1-\sin x)^2}$