Exercice 1

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$ et $v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto x - x^2$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que la suite (nu_n) est croissante et admet une limite $\ell \in]0,1]$.
3. En posant $v_n = nu_n$, montrer que la suite $(n(v_{n+1} - v_n))$ a une limite que l'on déterminera.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_{2n+1} < 1$.
2. Calculer $u_{n+2} - u_n$ et montrer que la suite (u_{2n+1}) est croissante.
3. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \alpha < 1$, alors $n(u_{2n+1} - u_{2n-1})$ a une limite non nulle.

   Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) = +\infty$, conclure.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels en posant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}} \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

Partie A

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne poss ède pas de limite finie ℓ

4. D éduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1. Ecrire $u_n - u_{n-1}$ et $u_n + u_{n-1}$ en fonction de u_{n-1} , et montrer que

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 < u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$.

2. En d éduire quepour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n < u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{u_n}$.

   En déduire de ce qui précède que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente dont on précisera la limite.

Exercice 1

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\theta}{2^n} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Calculons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\dfrac{\sin \frac{\theta}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \dfrac{1}{\cos \frac{\theta}{2^{n+1}}} > 1$

car $\sin 2x = 2\cos x \sin x$. Donc la suite (u_n) est donc croissante.

Maintenant pour (v_n), calculons $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2\dfrac{\tan \frac{\theta}{2^{n+1}}}{\tan \frac{\theta}{2^n}}$

Or $\tan 2\,x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ donc $\dfrac{2\tan x}{\tan 2\text{x}} = 1-\tan^2 x$

Par suite $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1-\tan^2 \dfrac{\theta}{2^n} < 1$. Donc la suite (v_n) est décroissante.

D'autre part $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\tan \frac{\theta}{2^n}} = \cos \frac{\theta}{2^n} < 1$ donc $u_n < v_n$.

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes .

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \theta\,\frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = \theta\,.$$

Exercice 2

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - x$.

   On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\frac{1}{4}$		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

   On a : $f(]0,1[) =]0, \frac{1}{4}]$.

   Si $u_n \in]0,1[$, alors $u_{n+1} \in]0,1[$.

   Si $u_n < \frac{1}{n+1}$, alors pour $n > 1$, f étant croissante sur $]0, \frac{1}{2}]$, on a : $f(u_n) < f(\frac{1}{n+1})$, d'où

$$u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}.$$

   Si $n = 1$, alors $u_1 = f(u_0) \in]0, \frac{1}{4}]$ et donc $0 < u_1 < \frac{1}{2}$.

2. Calculons

$$\begin{aligned}(n+1)u_{n+1} - nu_n &= (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n \\ &= u_n[(n+1)(1-u_n) - n] \\ &= u_n[1-(n+1)u_n] > 0.\end{aligned}$$

   Donc (nu_n) est croissante. De plus : $$0 < nu_n < n\frac{1}{n+1} < 1.$$

   On en déduit que (nu_n) est convergente vers un réel $\ell \in]0,1]$.

3. Soit $v_n = nu_n$. On a :

$$\begin{aligned}n(v_{n+1} - v_n) &= n[(n+1)u_{n+1} - nu_n] &&= n[(n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n] \\ &= nu_n[(n+1)(1-u_n) - n] &&= nu_n[1-(n+1)u_n]\end{aligned}$$

Donc $\qquad n(v_{n+1}-v_n) \quad = \quad nu_n[1-nu_n-u_n]>0$

car (u_n) tend vers 0 puisque $0<u_n<\dfrac{1}{n+1}$. La suite $(n(v_{n+1}-v_n))$ converge vers $\ell\,(1-\ell\,)$.

Exercice 3

1. On a : $\;0<u_1=\dfrac{1}{u_0+1}<1.$

   Puis comme $u_2=\frac{1}{u_1+\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{2}<u_1+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}<u_1<2$, on trouve

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}<u_2+\frac{1}{3}<2+\frac{1}{3}\Rightarrow u_3<1.$$

   Supposons pour $n\geq 2$ que $0<u_{2n+1}<1$, alors

$$\frac{1}{2n+2}<u_{2n+1}+\frac{1}{2n+2}<1+\frac{1}{2n+2}\Rightarrow\frac{2n+2}{2n+3}<u_{2n+2}<2n+2.$$

   De $\dfrac{2n+2}{2n+3}+\dfrac{1}{2n+3}<u_{2n+2}+\dfrac{1}{2n+3}$, on a bien : $u_{2n+3}<1$.

2. On a : $\qquad u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n+\frac{1}{n+1}}=\dfrac{n+1}{(n+1)u_n+1}\qquad$ et

$$u_{n+2}=\frac{1}{u_{n+1}+\frac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{(n+2)u_{n+1}+1}=\frac{n+2}{(n+2)\frac{n+1}{(n+1)u_n+1}+1}=\frac{[(n+1)u_n+1](n+2)}{(n+2)(n+1)+(n+1)u_n+1},$$

d'où
$$\begin{aligned} u_{n+2}-u_n &= \frac{[(n+1)u_n+1](n+2)}{(n+2)(n+1)+(n+1)u_n+1}-u_n \\ &= \frac{(n+1)(n+2)u_n+(n+2)-(n+1)(n+2)u_n-(n+1)u_n^2-u_n}{(n+2)(n+1)+(n+1)u_n+1} \\ &= \frac{(n+2)-(n+1)u_n^2-u_n}{(n+2)(n+1)+(n+1)u_n+1}. \end{aligned}$$

Comme 1 est racine du polynôme $-(n+1)X^2-X+(n+2)$, on a :

$$u_{n+2}-u_n=-\frac{(u_n-1)[(n+1)u_n+n+2]}{(n+2)(n+1)+(n+1)u_n+1}$$

On obtient alors $\quad u_{2n+3}-u_{2n+1}=-\dfrac{(u_{2n+1}-1)[(2n+2)u_{2n+1}+2n+3]}{(2n+3)(2n+1)+(2n+2)u_{2n+1}+1}>0.$

3. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\alpha<1$, alors

$$u_{2n+1}-u_{2n-1}=-\frac{(u_{2n-1}-1)[2nu_{2n-1}+2n+1]}{2n(2n+1)+2nu_{2n+1}+1},$$

d'où

$$n(u_{2n+1}-u_{2n-1})=-\frac{(u_{2n-1}-1)[2u_{2n-1}+2+\frac{1}{n}]n^2}{[2(2+\frac{1}{n})+\frac{2u_{2n+1}}{n}+\frac{1}{n^2}]n^2}=-\frac{(u_{2n-1}-1)[2u_{2n-1}+2+\frac{1}{n}]}{[2(2+\frac{1}{n})+\frac{2u_{2n+1}}{n}+\frac{1}{n^2}]}$$

$$\Rightarrow n(u_{2n+1}-u_{2n-1})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{4}=\frac{1-\alpha^2}{2}>0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}n(u_{2n+1}-u_{2n-1})>\frac{1-\alpha^2}{4}.$$

Il existe donc N tel que pour tout $n\geq N$, on a : $n(u_{2n+1}-u_{2n-1})>\frac{1-\alpha^2}{4}$.

Donc

$$\begin{array}{lcl} u_{2N+1}-u_{2N-1} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4N} \\ u_{2N+3}-u_{2N+1} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4(N+1)} \\ u_{2N+5}-u_{2N+3} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4(N+2)} \\ ... & > & \\ \hline u_{2n+1}-u_{2N-1} & > & \dfrac{1-\alpha^2}{4}+\dfrac{1-\alpha^2}{4N}+\dfrac{1-\alpha^2}{4(N+1)}+...+\dfrac{1-\alpha^2}{4n^2}. \end{array}$$

On en déduit que $u_{2n+1} > u_{2N-1} + \dfrac{1-\alpha^2}{4}(1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}) - \dfrac{1-\alpha^2}{4}(1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{N-1})$

et que (u_{2n+1}) diverge, donc contradiction.

4. Soit $$u_{2n} = \frac{1}{u_{2n-1}+\frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(u_{2n}) et (u_{2n+1}) converge vers 1, donc (u_n) tend aussi vers 1.

Exercice 4

Partie A

1. Montrons par récurrence que: pour tout n, $u_n \geq 1$.

   On a $u_0 = 1$ donc $u_n \geq 1$.

   Supposons que, pour $n \geq 2$ fixé, $u_n \geq 1$. Montrons que c'est encore vrai à l'ordre $(n+1)$.

   Comme $u_n \geq 1$, $\dfrac{1}{u_n}$ est positive, donc on a aussi $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \geq 1$.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2. $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{u_{n-1}} > 0$. On en déduit que (u_n) est croissante.

3. Raisonnons par l'absurde: Supposons que (u_n) converge vers ℓ.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \Rightarrow \ell = \ell + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = \ell^2 + 1 \Rightarrow 1 = 0,$$

   donc contradiction. On en déduit que (u_n) n'a pas de limite.

4. (u_n) n'est pas majorée. En effet si elle est majorée et croissante, elle converge.

   Or elle n'a pas de limite, donc elle est non-majorée.

   Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M$.

   Comme cela est valable pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1. On a $$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1}} \text{ et } u_n + u_{n-1} = 2u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}.$$

   On voit que $$u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1}) = 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} > 2$$

   car $\frac{1}{u_{n-1}^2} > 0$. Comme (u_n) est croissante, on a
$$u_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{u_{n-1}} > \frac{1}{u_{n-1}^2},$$
   d'où $2 < u_n^2 - u_{n-1}^2 < 2 + u_n - u_{n-1}$.

2. Ecrivons
$$\begin{array}{rcl}
2 < & u_1^2 - u_0^2 & \leq 2 + u_1 - u_0 \\
2 < & u_2^2 - u_1^2 & \leq 2 + u_2 - u_1 \\
\vdots & & \\
2 < & u_n^2 - u_{n-1}^2 & \leq 2 + u_n - u_1 \\
\hline
2n < & u_n^2 - u_0^2 & \leq 2n + u_n - u_0
\end{array}$$

   Comme $u_0 = 1$, on obtient bien $$2n < u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1.$$

3. Multiplions chaque membre par $\frac{1}{u_n^2}$, on a
$$\frac{2n}{u_n^2} < 1 - \frac{1}{u_n^2} < \frac{2n}{u_n^2} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{u_n^2} < \frac{2n}{u_n^2} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n^2}$$

   On en déduit que $$1 - \frac{1}{u_n} < \frac{2n}{u_n^2}.$$

   Cela donne $$1 - \frac{1}{u_n} < v_n^2 < 1 - \frac{1}{u_n^2}.$$

   On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.