Série : similitudes indirectes et complexes

Exercice 1:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ et on considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' dont l'affixe z' est donnée par :

$$z' = i\bar{z} + 1 - i$$

Déterminer l'ensemble des points invariants ; en déduire la nature de f.

Exercice 2:

Dans le plan complexe on considère l'application g dont l'écriture complexe est : $z' = i\bar{z} + 2$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants ; en déduire la nature de g.

2) On considère la symétrie orthogonale f d'axe D : $y = x - 1$, de l'exemple précédent l'écriture

a) Montrer que l'écriture complexe de f est : $z' = i\bar{z} + 1 - i$.

b) Donner l'écriture complexe de chacune des transformations $g \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ g$.

c) En déduire les éléments qui caractérisent $g \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ g$.

Exercice 3:

Dans le plan complexe on considère l'application h dont la traduction complexe est : $z' = i\bar{z} + 1$.

1) Démontrer que h est une symétrie glissante.

2) Soit $\vec{w}$ le vecteur de h. En considérant $h \circ h$ déterminer le vecteur $\vec{w}$.

3) Donner alors une équation de l'axe (D) de h.

Exercice 4:

Soit s la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z dans un repère orthonormé, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2+i)\bar{z} + 1 - 3i$

1) Quel est le rapport de cette similitude s ?

2) Quel est l'ensemble des points invariants par s ?

Série : similitudes indirectes et complexes

Exercice 1 :

▸ On a $|i| = 1$, donc on reconnaît la traduction complexe d'un antidéplacement du plan.

▸ Soit $M_{(z)}$; posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

M invariant $\Leftrightarrow z = i\bar{z} + 1 - i$

$\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) + 1 - i$

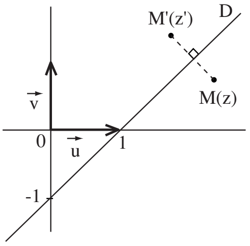
$\Leftrightarrow x + iy = y + 1 + ix - i$

Deux nombres complexes sous forme algébrique sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

M invariant $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x - 1$

L'ensemble des points invariants est la droite d'équation :

$y = x - 1$.



On en déduit que : **f est la symétrie orthogonale d axe D d'équation $y = x - 1$.**

Exercice 2 :

1) On reconnaît une traduction complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $|a| = 1$, il en résulte que g est un antidéplacement

Soit $M(z)$; posons $z = x + iy$ avec x et y réels

M invariant $\Leftrightarrow z = i\bar{z} + 2 \Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) + 2 \Leftrightarrow x + iy = y + 2 + ix \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = x \end{cases}$

Ce système est impossible donc il n'existe aucun point invariant.

g est donc un antidéplacement sans point invariant donc g est une symétrie glissante.

2) On sait que pour une symétrie orthogonale donc $f = f^{-1}$.

L'écriture complexe de f^{-1} est $z = i\bar{z}' + 1 - i$

Série : similitudes indirectes et complexes

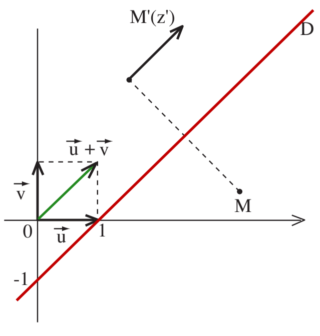
▸ Considérons $g \circ f^{-1}$:

$$M_{1(z_1)} \xmapsto{f^{-1}} M_{2(z_2)} \xmapsto{g} M_{3(z_3)}$$

$z_3 = i\,\overline{z}_2 + 2 = i(i\,\overline{\overline{z}_1 + 1 - i}) + 2 = i(-iz_1 + 1 + i) + 2$

d'où $z_3 = z_1 + 1 + i$

On reconnaît la traduction complexe de la translation $t_{\vec{u}+\vec{v}}$ de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, d'affixe $1 + i$.



▸ Considérons $f^{-1} \circ g$:

$$M_{(z)} \xmapsto{g} M'_{(z')} \xmapsto{f^{-1}} M''_{(z'')}$$

$z'' = i\,\overline{z}' + 1 - i = i(i\,\overline{\overline{z} + 2}) + 1 - i = i(-iz + 2) + 1 - i$

d'où $z'' = z + 1 + i$ qui est encore la traduction complexe de la translation $t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

d'où $\mathbf{f^{-1} \circ g = t_{\vec{u}+\vec{v}}}$ ou encore $g = f \circ t_{\vec{u}+\vec{v}}$

On en déduit : $\mathbf{g = f \circ t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} \circ f}$

g est la symétrie glissante d'axe D : $y = x - 1$ et de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 3 :

1) $z' = i\,\overline{z} + 1$ est une relation de la forme $z' = a\,\overline{z} + b$ où $|a| = 1$ donc h est un antidéplacement.

Recherche des éventuels points invariants ; soit $M(z)$; posons $z = x + iy$ avec x et y réels

M invariant $\Leftrightarrow z = i\,\overline{z} + 1 \Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) + 1$

$$\Leftrightarrow x + iy = y + 1 + ix \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = x \end{cases}$$

Le système obtenu n'a pas de solution, donc h est un antidéplacement qui n'admet aucun point invariant.

h est donc une symétrie glissante

2) On sait que : $h \circ h = t_{2\vec{w}}$

Écrivons la traduction de $h \circ h$ par les nombres complexes :

$$M_{(z)} \xmapsto{h} M'_{(z')} \xmapsto{h} M''_{(z'')}$$

$z'' = i\,\overline{z}' + 1 = i(i\,\overline{\overline{z} + 1}) + 1 = i(-iz + 1) + 1$ d'où $z'' = z + 1 + i$

Il en résulte que l'affixe du vecteur $2\vec{w}$ est $1 + i$ donc **l'affixe du vecteur $\vec{w}$ est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.**

Série : similitudes indirectes et complexes

3) Pour $M(z)$ et son image $M'(z')$ on a toujours : $z' = i\bar{z} + 1$

Et on sait que pour tout point M, le milieu du segment $[MM']$ est situé sur l'axe D de h .

En particulier, on connaît l'image du point O, c'est le point O' d'affixe 1, donc le milieu I du segment $[OO']$ a pour affixe : $z_I = \dfrac{1}{2}$.

La droite D cherchée est maintenant connue :

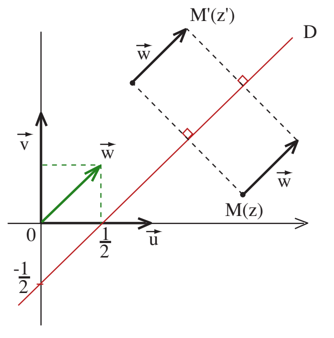
D passe par I de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ et admet $\vec{w}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ comme vecteur directeur.

Recherche d'une équation de D ; soit $N(x, y)$

$N \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{IN}$ et $\vec{w}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ y - 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$



Donc une équation de D est $y = x - \dfrac{1}{2}$

Ainsi : $h = S_D \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{w}} \circ S_D$ où $\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{v}$ et D a pour équation : $y = x - \dfrac{1}{2}$

Exercice 4 :

1) On sait que le rapport k de cette similitude indirecte est tel que : $k = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

2) Soit M point d'affixe z ; posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

M invariant par s $\Leftrightarrow s(M) = M \Leftrightarrow z = (2 + i)\bar{z} + 1 - 3i$

$$\Leftrightarrow x + iy = (2 + i)(x - iy) + 1 - 3i$$

$$\Leftrightarrow x + iy = 2x + ix - 2iy + y + 1 - 3i$$

$$\Leftrightarrow x + iy = 2x + y + 1 + i(x - 2y - 3)$$

Deux nombres complexes, donnés sous forme cartésienne, sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire ; d'où :

$$\text{M invariant} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + y + 1 \\ y = x - 2y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ 3y = x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -3x - 3 \\ 3y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -3x - 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

la similitude indirecte s admet un unique point invariant, c'est le point de coordonnées $(0\,;-1)$.