Exercice 1 : (exo 24-page 94- tome 2)

On considère un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. La médiatrice de [OB] coupe la droite (OB) en H' et coupe la droite (OA) en H. On note J le symétrique de O par rapport à H et J' celui de O rapport à H'.

1 . a) Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.

b) En déduire que les points B , J et J' sont alignés.

2. Soit f la similitude directe qui envoie J sur O et O sur J'.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Déterminer f(B) et en déduire le centre et le rapport de f.

3. Soit g la similitude indirecte qui envoie J sur O et O sur J'.

a) Déterminer le rapport de g.

b) En déduire que g admet un unique point invariant que l'on notera I.

c) Déterminer $g \circ g(J)$ et en déduire que I appartient à (JJ').

d) Construire le centre et l'axe de g.

Solution :

1. a) Les droites (BJ) et (OB) sont perpendiculaires donc OBJ est un triangle rectangle en B.

Les droites (BJ') et (OB) sont perpendiculaires donc OBJ' est un triangle rectangle en B.

b) $(BJ) \perp (BO)$ et $(BJ') \perp (BO)$ donc $(BJ) // (BJ')$ d'où les points B , J et J'.

2. a) $\left(\overrightarrow{JO},\overrightarrow{OJ'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OJ'}\right) - \pi[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JO},\overrightarrow{OJ'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc l'angle de f est $-\frac{\pi}{2}$.

b) On a : f(J) = O et f(O) = J' et comme les deux triangles OBJ et J'BO sont rectangles en B alors f(B) = B. Le rapport de f est donc $\frac{BO}{BJ} = 2$.

3. a) Le rapport de g est $\frac{OJ'}{JO} = \frac{BO}{BJ} = 2$.

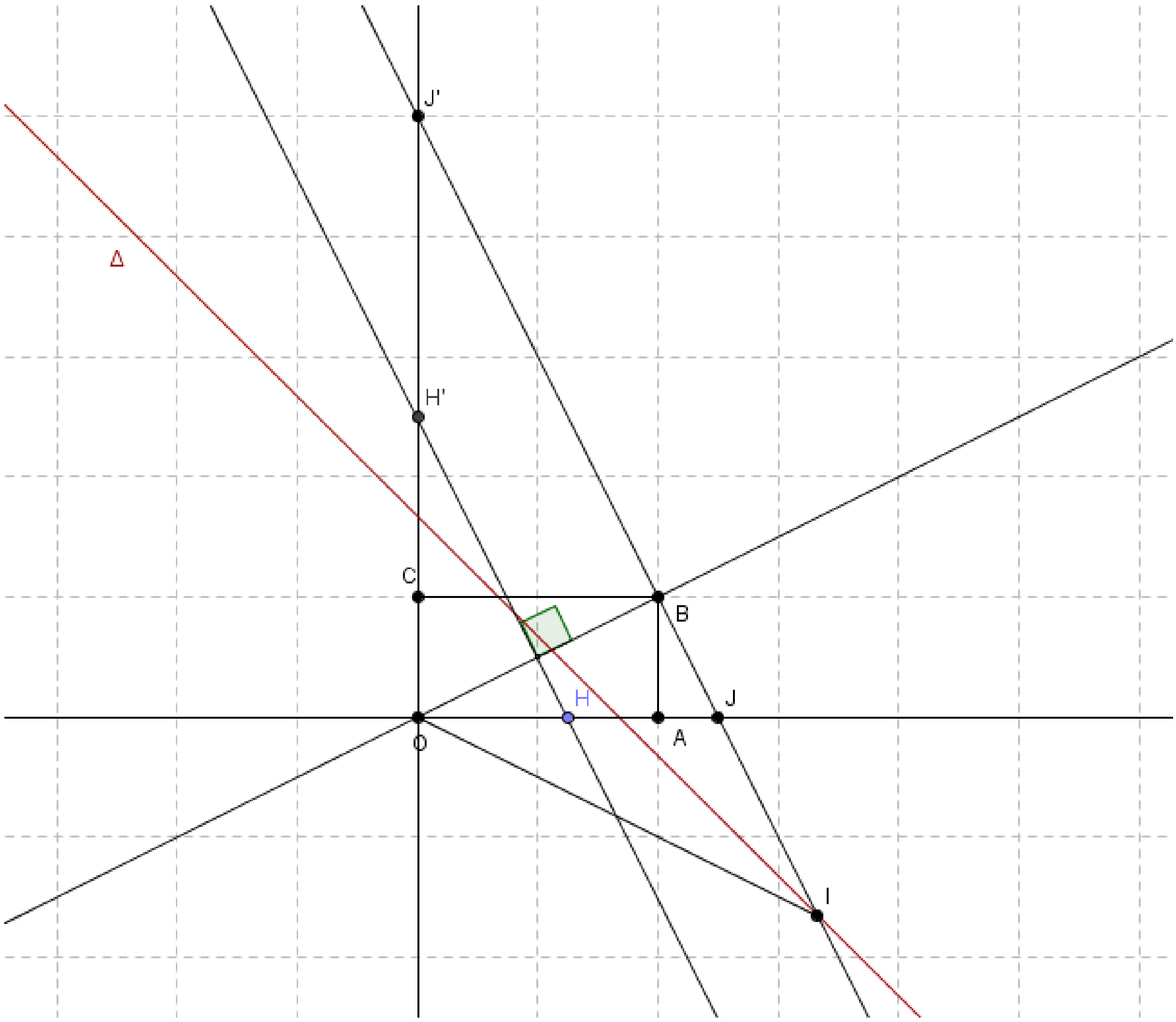
b) Comme g est une similitude indirecte de rapport 2 alors g admet un unique point invariant I .

c) $g\circ g(J)=g(g(J))=g(O)=J'$. Or $g\circ g=h_{(I,4)}$, il en résulte : I , J et J' sont alignés .

D' où I appartient à la droite (JJ').

d) $h_{(I,4)}(J)=J'\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ'}=4\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow I$ barycentre de (J', 1) et (J, -4) $\Leftrightarrow \overrightarrow{J'I}=\frac{4}{3}\overrightarrow{J'J}$.

g(J) = O et les points I, J et O ne sont alignés donc l'axe (Δ) de g est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IO}\right)$



Exercice 2 : (exo 21- page94- tome 2)

Soit ABC un triangle équilatéral direct. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] et par D le symétrique de Q par rapport à C.

1. Soit f l'antidéplacement tel que f(C) = A et f(A) = B. Identifier f.
2. Soit g la similitude directe telle que g(B) = D et g(I) = C.

Montrer que g(A)= A et déterminer les éléments caractéristiques de g.

3. Soit K le point défini par $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{0}$.
   a) Déterminer la nature de $f\circ g$.
   b) Déterminer $f\circ g(I)$ et $f\circ g(A)$.
   c) Vérifier que $\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{0}$. En déduire que $f\circ g(K)=K$.
   d) Déterminer le rapport de $f\circ g$.
   e) Montrer que l'axe de similitude $f\circ g$ est la perpendiculaire en K à la droite (AB).

Solution :

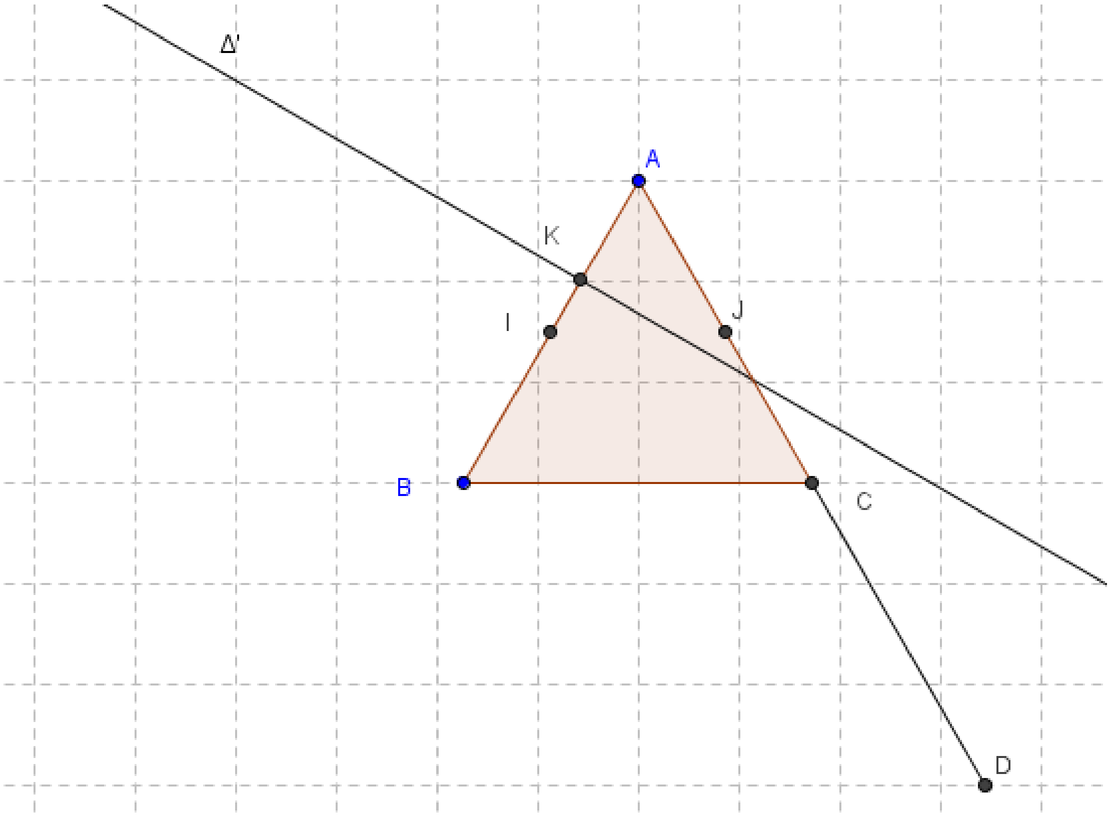
1. f est l'antidéplacement tel que f(C)= A et f(A) = B d'où $f\circ f(C)=B$. Comme $B\neq C$ alors g n'est pas une symétrie orthogonale et par suite g est une symétrie glissante.
   Soit $\vec{u}$ le vecteur de f et (Δ) l'axe de f :
   On sait que $f\circ f=t_{2\vec{u}}$ et $f\circ f(C)=B$ donc $2\vec{u}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
   Or I est milieu de [AB] et J milieu de [AC] donc $\vec{u}=\overrightarrow{JI}$.
   f(C) = A $\Rightarrow J\in(\Delta)$ et f(A) = B $\Rightarrow I\in(\Delta)$; comme $I\neq J$, alors $\Delta=(IJ)$.
2. On a , d'une part : I est milieu de [AB] donc g(I)= C est milieu de g([AB]) = [g(A)D] ; d'autre part : C est milieu de [AD].
   Il en résulte que g(A) = A.
   A est le centre de la similitude directe g.
   $\frac{DC}{BI}=\frac{AB}{\frac{1}{2}AB}=2$ donc le rapport de g est 2.
   $$\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$
   donc l'angle de g est $\frac{\pi}{3}$.
3. a) f est une similitude indirecte et g est une similitude directe donc $f\circ g$ est une similitude indirecte de rapport 2.
   b) $f\circ g(I)=f\left[g(I)\right]=f(C)=A$ et $f\circ g(A)=f\left[g(A)\right]=f(A)=B$.
   c) $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA}+2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AI}\right)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{0}$.

Posons $f \circ g(K) = K'$: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{K'B} + 2\overrightarrow{K'A} = \overrightarrow{0}$ or $\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{0}$, il en résulte : K' = K.

Ainsi : $f \circ g(K) = K$.

d) Comme le rapport de f est 1 et le rapport de g est 2 alors le rapport $f \circ g$ est 2.

e) $\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} = -2\overrightarrow{KA}$ et $f \circ g(A) = B$ donc l'axe (Δ') de $f \circ g$ est la perpendiculaire en K à la droite (AB).



Exercice 3 : (exo 27 –page 95 – tome 2)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. La bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ coupe [AC] en O. On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].

1 . a) Faire une figure.

b) Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].

2 . Soit f la similitude directe telle que f(B) = O et f(H) = H'.

a) Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.

b) Montrer que H' est le milieu du segment [Of(A)]. En déduire que A est le centre de f.

3. Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.

a) Montrer que les points B, O et D sont alignés.

b) Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que f(C) = D.

c) Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.

4. Soit $g = S_{(DH)} \circ f$.

a) Déterminer g(A) et g(B).

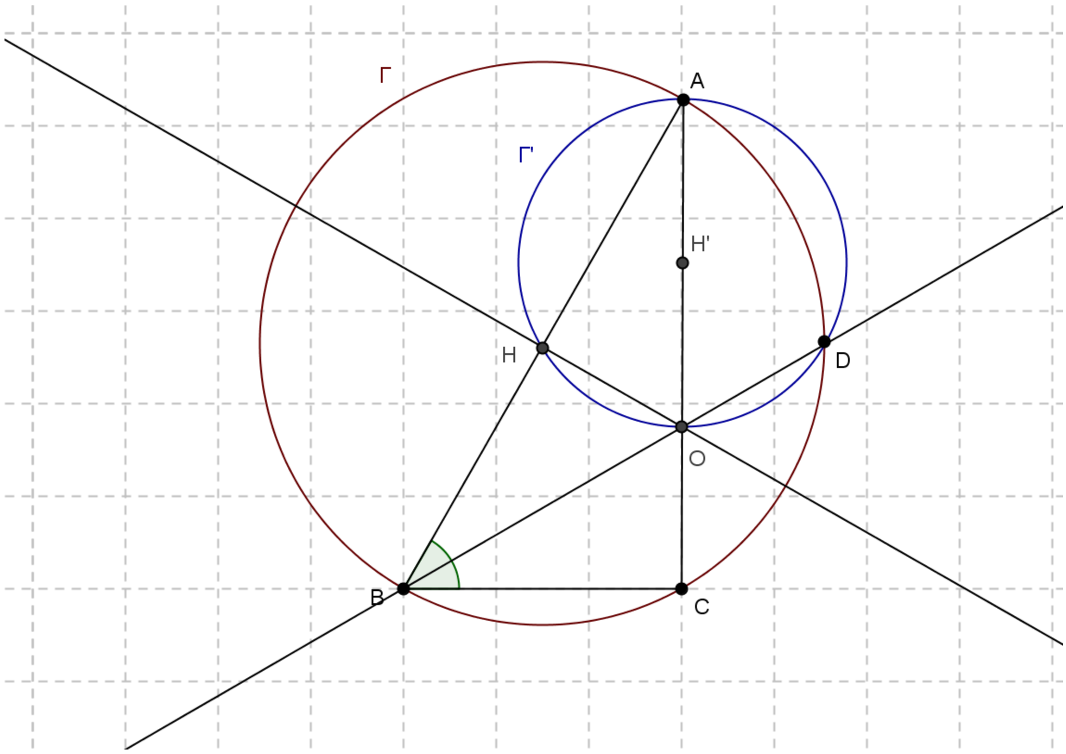
b) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

c) Soit Ω le centre de g. Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.

Construire alors le centre Ω et l'axe (Δ) de g.

Solution

1. a) Figure :



b) (BO) est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$

donc $\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Or

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

Par suite le triangle OAB est isocèle en O.

H est le projeté orthogonal sur (AB) donc (HO) est la médiatrice du segment [AB] ; d'où H est le milieu de [AB].

2 . f est le similitude directe telle que f(B) = A et f(H)= H' .

$\frac{OH'}{BH} = \frac{\frac{1}{2}OA}{BH} = \frac{1}{2}\frac{BO}{BH} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc l'angle de f est $\frac{\pi}{6}$.

b) H est milieu de [BA] donc f(H)= H' est milieu de f([BA]) = [Of(A)] . Comme H' est milieu de [OA] alors f(A) = A d'où A est centre de f.

3 . a) $D \in (\Gamma)$ donc $(BD) \perp (AD)$ et $D \in (\Gamma')$ donc $(OD) \perp (AD)$; il en suit : $(BD) // (OD)$; d'où les points B , O et D sont alignés.

b) On a : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; d'autre part : H est le centre du cercle (Γ) et C $\in [\Gamma]$ donc

$\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi, BCH est un triangle équilatéral.

Les points O et D appartiennent au cercle (Γ') de centre H' donc H'O = H'D ;

Le triangle ABD est rectangle en D et $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$; il ne résulte : $\left(\overrightarrow{H'D},\overrightarrow{H'O}\right)\equiv 2\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AO}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{H'D},\overrightarrow{H'O}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi le triangle ODH' est équilatéral.

On en déduit que les triangles BCH et ODH' sont semblables et directs, par suite il existe une unique similitude directe S qui envoie B sur O, C sur D et H sur H'. Or f est une similitude directe qui envoie B sur O et H sur H', donc f(C) = D.

c) La droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH}\right)$ donc (BD) est la médiatrice de [CH]

d'où CD = DH et comme HC = HA alors HC = HA = HD . Il en résulte : le triangle CDH est équilatéral ;

Or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$; donc le triangle ADH est équilatéral.

Par suite, le quadrilatère ADCH est un losange.

4 . a) $g(A)=S_{(DH)}\circ f(A)=S_{(DH)}(A)=C$ et $g(C)=S_{(DH)}\circ f(C)=S_{(DH)}(D)=D$.

b) $S_{(DH)}$ est une similitude indirecte de rapport 1 et f est une similitude directe de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) Soit Ω le centre de g , $g\circ g=h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}$ et $h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}(A)=g\circ g(A)=g[g(A)]=g(C)=D$

donc $\overrightarrow{\Omega D}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.

$\overrightarrow{\Omega D}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\Omega D}-\overrightarrow{\Omega A}=\overrightarrow{0}$ donc Ω est le barycentre de (D, 3) et (A, -1) d'où

$\overrightarrow{D\Omega}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

Comme g(C) = D et (Ω, C et D ne sont pas alignés) alors l'axe (Δ) de g est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}\right)$