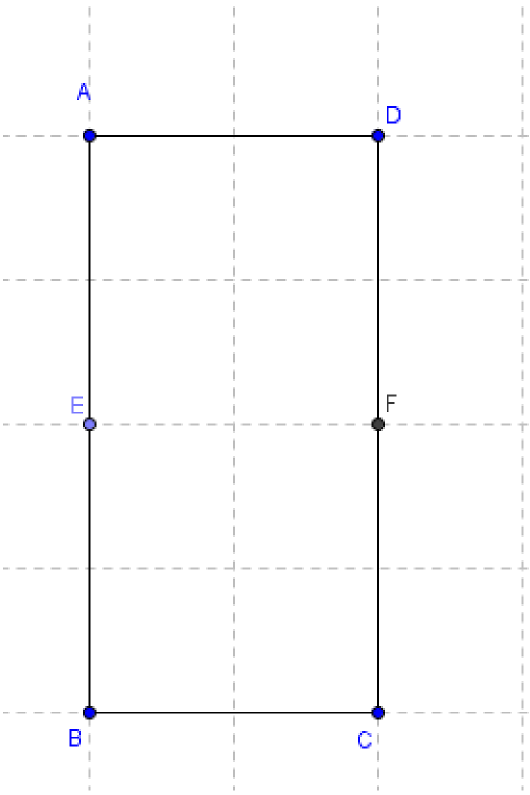
Isométries – Déplacements & antidéplacements

Exercice 1 :

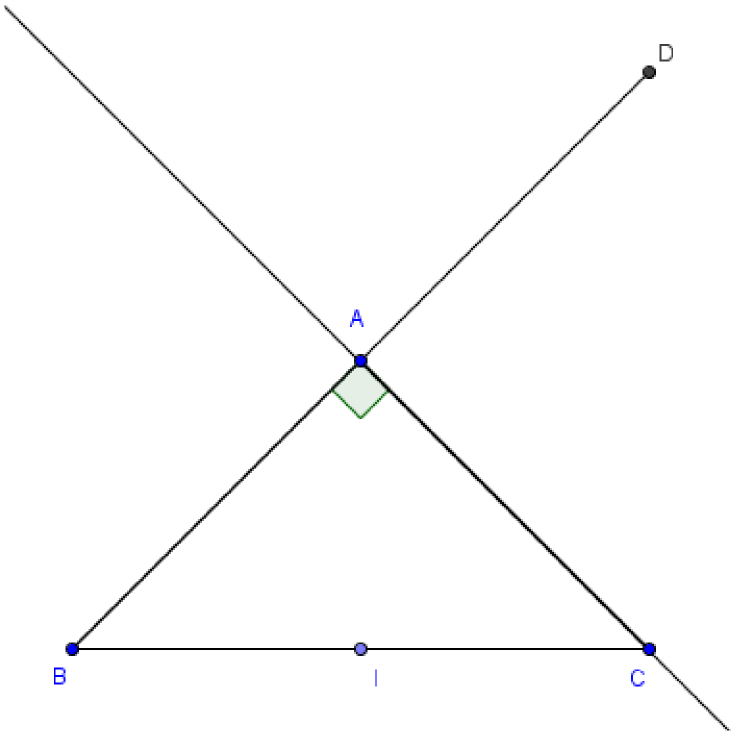
Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 2AD$.
On désigne par E et F les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].



1. Caractériser $S_{(AB)} \circ S_{(EF)}$ et $S_{(AB)} \circ S_{(AF)}$.
2. Caractériser $S_{(AD)} \circ S_{(EF)}$ et $S_{(ED)} \circ S_{(BF)}$.
3. Soit $f = S_{(BF)} \circ S_{(AF)} \circ S_{(AB)}$.
   a) Montrer que $f = S_{(EF)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$.
   b) Identifier f.
4. Identifier $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$ et $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle direct et isocèle en A, D le symétrique de B par rapport à (AC) et I le milieu du segment [BC].



1. Montrer qu'il existe une unique isométrie f qui fixe A et qui envoie B en C et C en D.
2. On pose $g = S_{(AC)} \circ f$.
   a) Déterminer g(A), g(B), g(C) et g(I).
   b) Montrer que g est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera.
3. Identifier f.
4. On pose $h = S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
   Montrer que h est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Isométries – Déplacements & antidéplacements

Exercice 3 :

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que : $AB = 5$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I, J, K, L, et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].

On appelle (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par : f(A) = B, f (B) = D et f (D) = C.

   a) Démontrer que, s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C et D.

   b) L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Démontrer que f = $r \circ S_\Delta$.

3. Soit s_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC).

   a) Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2 telle que $r = s_1 \circ s_2$.

   b) En déduire que $f = s_1 \circ t_1$, où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

   a) Déterminer g(D), g(I) et g(O).

   b) En déduire la nature précise de la transformation g.

   c) Démontrer alors que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Isométries – Déplacements & antidéplacements

Corrigé

Exercice 1 :

1. Les droites (AB) et (EF) sont perpendiculaires en E donc $S_{(AB)} \circ S_{(EF)}$ est la symétrie centrale de centre E c'est-à-dire : $S_{(AB)} \circ S_{(EF)} = S_E$

   AEFD est un carré de sens direct donc
   $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

   Il en résulte $S_{(AB)} \circ S_{(AF)}$ est la rotation de centre A et d'angle $.2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $S_{(AB)} \circ S_{(AF)} = r_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

2. On a $(AD) // (AF)$ et $t_{\overrightarrow{EA}}\left((EF)\right) = (AD)$ donc $S_{(AD)} \circ S_{(EF)} = t_{2\overrightarrow{EA}} = t_{\overrightarrow{BA}}$.
   Les droites (ED) et (BF) sont parallèles car BFDE est un parallélogramme ,
   $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}}\left((BF)\right) = (DE)$ et $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal à (BF)
   Donc $S_{(DE)} \circ S_{(BF)} = t_{\overrightarrow{CE}}$.

3. a) On sait que : $f = S_{(BF)} \circ S_{(AF)} \circ S_{(AB)}$. Pour démontrer que $f = S_{(EF)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$, il suffit de démontrer que $S_{(BF)} \circ S_{(AF)} = S_{(EF)} \circ S_{(CD)}$.
   Comme AEFD et BCFE sont deux carrés de sens direct alors
   $\left(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
   Ainsi les droites (BF) et (AF) sont perpendiculaires en F par conséquent
   $S_{(BF)} \circ S_{(AF)} = S_F$.
   Or les droites (DC) et (EF) sont aussi perpendiculaires en F donc $S_{(EF)} \circ S_{(CD)} = S_F$.
   Par suite : $f = S_{(EF)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$.

   b) Les droites (CD) et (AB) sont parallèles et $t_{\overrightarrow{AD}}\left((AB)\right) = (CD)$ donc
   $S_{(CD)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}}$

   Ainsi $f = S_{(EF)} \circ t_{2\overrightarrow{AD}}$. Comme $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur directeur de (EF) alors f est la symétrie glissante d'axe (EF) et de vecteur $2\overrightarrow{AD}$.

4. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à la droite (AD) donc l'idée est la suivante : on décompose la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ en produit de deux symétries orthogonales de façon à avoir
   $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{\Delta} \circ S_{(AD)}$ avec $\Delta = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}\left((AD)\right) = t_{\overrightarrow{AE}}\left((AD)\right) = (AE)$.

   il en suit : $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)} = S_{(AE)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AD)} = S_{(AE)}$.

Isométries – Déplacements & antidéplacements

Corrigé

$\overrightarrow{AC}$ n'est ni un vecteur directeur de (AB) , ni un vecteur normal à (AB) donc l'idée est la suivante : on décompose la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$ de la manière suivante :

$t_{\overrightarrow{AC}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$.

Ainsi $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{\Delta'} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)}$ où $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}\left((AB)\right)$ est la médiatrice du segment [AD].

Par conséquent : $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{\Delta'}$ et comme $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ') alors $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$ est la symétrie glissante d'axe (Δ') et de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 :

1. On a : A, B et C sont trois points non alignés.

Comme ABC est un triangle isocèle de sommet principal A alors AB = AC .

D'autre part , D est le symétrique de B par rapport à A donc AB = AD d'où AC = AD .

A est le milieu du segment [BD] et les droites (AC) et (AB) sont perpendiculaires donnent (Ac) est la médiatrice du segment [BD] d'où CB = CD .

Donc il existe une unique isométrie f qui fixe A et envoie B sur C et C sur D.

2. a) $g(A) = S_{(AC)} \circ f(A) = S_{(AC)}\left(f(A)\right) = S_{(AC)}(A) = A$

   $g(B) = S_{(AC)} \circ f(B) = S_{(AC)}\left(f(B)\right) = S_{(AC)}(C) = C$

   $g(C) = S_{(AC)} \circ f(C) = S_{(AC)}\left(f(C)\right) = S_{(AC)}(D) = B$

   I est le milieu du segment [BC] donc g(I) est le milieu du segment g([BC]) = [CB]
   Donc g(I) = I.

   b) On a d'une part : g est une isométrie et comme g(B) = C et $C \neq B$ alors $g \neq Id_P$

   et d'autre part : $A \neq I$, g(A) = A et g(I) = I .

   Il en résulte que $g = S_{(AI)}$.

3. $g = S_{(AI)} \Leftrightarrow S_{(AC)} \circ f = S_{(AI)} \Leftrightarrow S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ f = S_{(AC)} \circ S_{(AI)} \Leftrightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(AI)}$

   Or $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc $f = r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$.

4. Remarquons d'abord que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires donc $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = S_A$.

   Ainsi $h = S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ S_A$.

Isométries – Déplacements & antidéplacements

Corrigé

L'idée consiste à décomposer la symétrie centrale S_A de façon à obtenir :

$h = S_{(BC)} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ telle que Δ_2 est la parallèle à (BC) passant par A et Δ_1 est la perpendiculaire à Δ_2 en A . C'est-à-dire $\Delta_1 = (AI)$ et $t_{\overrightarrow{AI}}(\Delta_2) = (BC)$ donc $S_{(BC)} \circ S_{\Delta_2} = t_{2\overrightarrow{AI}}$.

D'où $h = t_{2\overrightarrow{AI}} \circ S_{(AI)}$; h est donc la symétrie glissante d'axe (AI) et de vecteur $2\overrightarrow{AI}$.

Exercice 3 :

1. a) On suppose qu'il existe un point M invariant par f .
   On a :
   $\begin{cases} f(M) = M \\ f(A) = B \end{cases} \Rightarrow MA = MB$, $\begin{cases} f(M) = M \\ f(B) = D \end{cases} \Rightarrow MB = MD$ et $\begin{cases} f(M) = M \\ f(D) = C \end{cases} \Rightarrow MD = MC$
   D'où MA = MB = MC = MD.
   Ainsi, s'il existe un point M invariant par f alors M est équidistant des points A, B, C et D.

   b) Raisonnons par l'absurde et supposons que f admet un point invariant M, il en résulte que M est un point équidistant des points A, B , C et D.

   De MA = MB , on déduit que $M \in (\Delta)$

   et MC = MD , on déduit que $M \in (\Delta')$.

   Ce qui est absurde car les droites (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.

   Par suite, f n'admet aucun point invariant.

2. On a :
   - f(**B**) = D et $r \circ S_\Delta(B) = r(A) = D$,
   - f(**A**) = B et $r \circ S_\Delta(A) = r(B) = B$,
   - f(**D**) = C et $r \circ S_\Delta(D) = r(D) = C$ car BCD est un triangle équilatéral direct.

D'autre part , les points **B**, **A** et **D** ne sont pas alignés

Ainsi , les isométries f et $r \circ S_\Delta$ coïncident en trois points non alignés donc f = $r \circ S_\Delta$.

3. a) Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $S_{(BC)} \circ S_{(BK)} = r_{\left(B, -\frac{\pi}{3}\right)} = r$.

   Pour que r = $s_1 \circ s_2 = S_{(BC)} \circ s_2$, il faut et il suffit que $s_2 = S_{(BK)}$.

Corrigé

Ainsi l'axe de la symétrie orthogonale s_2 est la droite (Δ').

b) $f = r \circ S_\Delta = s_1 \circ s_2 \circ S_\Delta = s_1 \circ S_{\Delta'} \circ S_\Delta$

comme $\Delta' = t_{\overrightarrow{IB}}(\Delta)$ et $\overrightarrow{IB}$ est un vecteur normal à (Δ) alors $f = s_1 \circ t_{2\overrightarrow{IB}} = s_1 \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

On conclue que $f = s_1 \circ t_1$ avec t_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4. a) On a : $g = t_2^{-1} \circ f = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}} \circ f$

$g(D) = t_2^{-1} \circ f(D) = t_2^{-1}(C) = J$,

I est le milieu du segment [AB] donc f(I) est le milieu du segment f([AB]) = [BD] d'où f(I) = O.

On en déduit que : $g(I) = t_2^{-1} \circ f(I) = t_2^{-1}(O) = I$

car O milieu de [BD] et I milieu de [BA] donc $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

O milieu de [BD] donc f(O) milieu de f([BD]) = [DC] d'où f(O) = K.

Par suite : $g(O) = t_2^{-1} \circ f(O) = t_2^{-1}(K) = O$

car O milieu de [DB] et K milieu de [DC] donc $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

b) On a :

- g est une isométrie ,
- $g(D) = J$ et $J \neq D$ donc $g \neq Id_P$
- $O \neq I$, $g(O) = O$ et $g(I) = I$

Donc $g = S_{(OI)}$.

c) $t_2^{-1} \circ f = g \Leftrightarrow t_2^{-1} \circ f = S_{(OI)} \Leftrightarrow t_2 \circ t_2^{-1} \circ f = t_2 \circ S_{(OI)} \Leftrightarrow f = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}} \circ S_{(OI)}$

Donc f est la symétrie glissante d'axe (OI) et de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.