Coniques (2)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 1:

On considère les points A (5 ; 0), F (3 ; 0) et la droite (δ) d'équation $x = \frac{25}{3}$.

Soit (E) l'ellipse de foyer F, de directrice (δ), d'excentricité e et dont A est un sommet principal.

1) a- Vérifier que $e = \frac{3}{5}$.

b- Vérifier que le point A' (-5 ; 0) est l'autre sommet principal de (E) et en déduire le centre de (E).

c- Ecrire une équation de (E) et tracer (E).

d- Calculer l'aire du domaine limité par l'ellipse (E) et son cercle principal.

2) Soit G et G ' les points de (E) d'abscisse 3.

a- Ecrire une équation de la tangente (D) en G à (E) et une équation de la tangente (D') en G ' à (E).

b- Vérifier que les droites (D), (D') et (δ) se coupent en un même point H sur l'axe des abscisses.

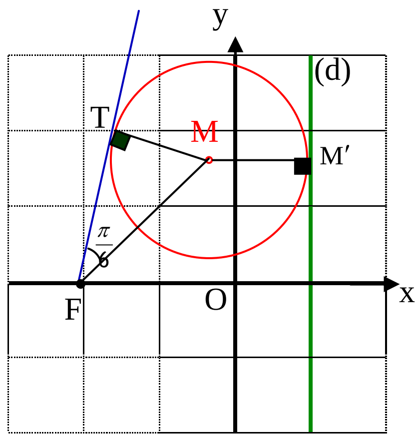
c- Montrer que tan $\tan\widehat{FGH} = e$.

Exercice 2

On considère le point F(-2 ; 0) et la droite (d) d'équation x = 1 .

Soit (C) un cercle variable de centre M tel que :

- La droite (d) est tangente en M' à (C).
- (FT) est tangente à (C) en T.
- L'angle $\widehat{TFM}$ reste égale à $\frac{\pi}{6}$.



1) Démontrer que $\frac{MF}{MM'}=2$ et déduire que M décrit une conique (H) dont on précisera la nature, le foyer , la directrice et l'excentricité.

2) Vérifier que les points O et A (4 ; 0) sont les sommets de (H) et en déduire le centre et le second foyer de (H).

3) a- Ecrire une équation de (H) et déterminer ses asymptotes.

b- Vérifier que le point B (6 ; 6) est un point de (H) et écrire une équation de la tangente (Δ) en B à (H).

c- Tracer (Δ) et (H).

Coniques (2)

4) Soit (D) le domaine limité par la conique (H), la tangente (Δ) et la droite d'équation $x = 4$.
   Calculer le volume engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

Exercice 3

L'unité graphique est 3 cm.

On donne les paraboles (P) et (P') d'équations respectives $y^2 = 2x - 1$ et $x^2 = 2y - 1$.

1) Déterminer le sommet, le foyer et la directrice de chacune de ces deux paraboles (P) et (P').

2) Vérifier que le point A (1 ; 1) est commun à (P) et (P') et démontrer que (OA) est une tangente commune aux deux paraboles.

3) Démontrer que la perpendiculaire (d) en O à (OA) est une tangente commune à (P) et (P').

4) Tracer (d) , (P) et (P').

5) a) Montrer que l'aire du domaine limité par (P), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$ vaut 3 cm^2.

   b) Déduire l'aire, en cm^2, du domaine limité par (P), (P') , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

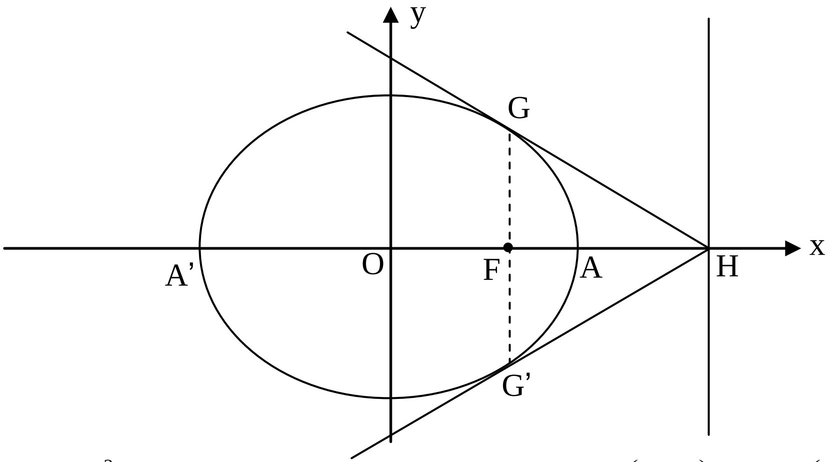
Coniques (2)

Exercice 1

1. a) $e = \frac{AF}{AH} = \frac{2}{\frac{25}{5} - 5} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{A'F}{A'H} = \frac{5+3}{\frac{25}{3}+5} = \frac{3}{5}$ et A' appartient à l'axe focal (AF) donc A' est un sommet principale de (E) .Le centre est le milieu O de $[AA']$.

c) $a = 5$, $c = 3$, $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$, d'où l'équation de (E) est $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



2.a) Pour $x = 3$; $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; $y = \frac{16}{5}$ ou $y = -\frac{16}{5}$; $G\left(3; \frac{16}{5}\right)$ et $G'\left(3; -\frac{16}{5}\right)$

$(D): \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ donne $\frac{3x}{25} + \frac{\frac{16}{5}y}{16} = 1$; $\frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1$; $y = -\frac{3}{5}x + 5$

$(D'): y = \frac{3}{5}x - 5$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

b) $\frac{3x}{5} - 5 = -\frac{3x}{5} + 5$; $x = \frac{25}{3}$ et $y = 0$ d'où $(D) \cap (D') = \{H\}$; $H = \left(\frac{25}{3}, 0\right)$.

c) $\tan F\hat{H}G = \frac{FG}{FH} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{25}{3} - 3} = \frac{16}{5} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{5} = e$

Exercice 2

1. $\frac{MF}{MM'} = \frac{MF}{MT}$; le triangle MTF est semi-équilatéral donc $\frac{MF}{MT} = \frac{1}{\sin \hat{F}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, d'où

$\frac{MF}{MM'} = 2$ et M décrit l'hyperbole (H) de foyer F , de directrice (d) et d'excentricité 2.

Coniques (2)

2. (OF) est l'axe focal ; $\frac{OF}{OK} = \frac{AF}{AK} = 2$ où $\{K\} = (d) \cap (O, \vec{i})$ donc O et A sont les sommets de (H).

Le centre I est le milieu de [OA] d'où I(2 ; 0) . I est le milieu de [FF'] d'où F'(6 ; 0).

3.a) M(x ; y) , M'(1 ; y) , F(– 2 ; 0)

$M \in (H) \Leftrightarrow \frac{MF}{MM'} = 2 \Leftrightarrow MF^2 = 4\,MM'^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - y^2 - 12x = 0$

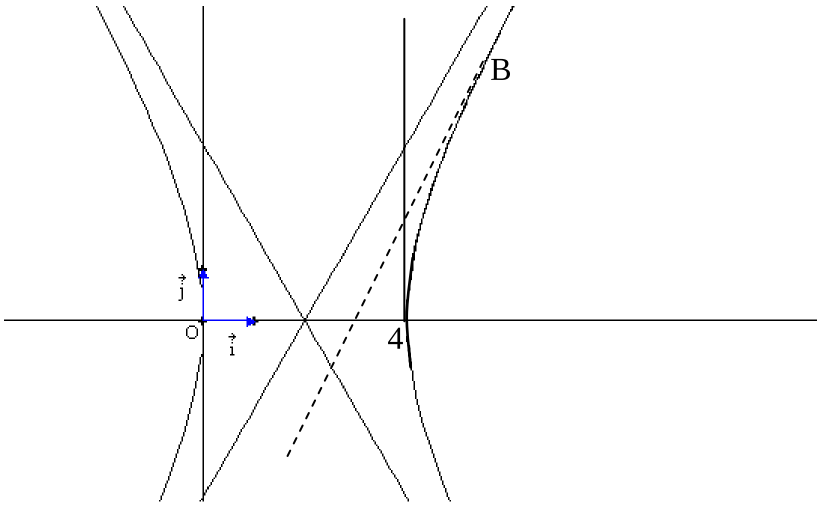
➜**OU** : 2a = OA = 4 ; a = 2 ; 2c = FF' = 8 ; c = 4 donc $b^2 = c^2 - a^2 = 12$

I(2 ; 0) est le centre de (H), donc (H) : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

Asymptotes : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 0$; $y = \sqrt{3}\,(x-2)$ ou $y = -\sqrt{3}\,(x-2)$.

b) Pour x = 6 et y = 6 on a $\frac{(6-2)^2}{4} - \frac{6^2}{12} = 1$, d'où B est un point de (H).

Equation de (Δ) : $\frac{(x-2)(x_B-2)}{4} - \frac{y y_B}{12} = 1$; y = 2x – 6.



c) $V = \pi\int_4^6 [4(x-3)^2 - (3x^2 - 12x)]dx = \pi\left[\frac{4}{3}(x-3)^3 - x^3 + 6x^2\right]_4^6 = \frac{8\pi}{3}u^3.$

Exercice 3

(P) : $y^2 = 2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$ et (P') : $x^2 = 2y - 1$.

1. P) de sommet S($\frac{1}{2}$,0) , de foyer F(1 ;0) et de directrice $(O, \vec{j})$.

(P') de sommet S'(0, $\frac{1}{2}$) , de foyer F'(0 ;1) et de directrice $(O, \vec{i})$.

Coniques (2)

2. Les coordonnées de A vérifient les équations de (P) et de (P’) , donc A est un point commun à ces paraboles.

► (OA) : y = x

(OA) $\cap$ (P) : $x^2 = 2x - 1$; $(x-1)^2 = 0$, x’ = x’’ = 1(racine double)

(OA) est tangente à (P) en A.

(OA) $\cap$ (P’) : $y^2 = 2y - 1$; $(y-1)^2 = 0$, y’ = y’’ = 1(racine double)

(OA) est tangente à (P’) en A.

► Ou : 2yy’ = 2 , $y' = \frac{1}{y}$ et $y_A' = 1$; l’équation de la tangente en A à (P) est y – 1 = 1(x – 1) ;

y = x c’est (OA) .

De même pour (P’).

► Soit en remarquant que (OA) est la bissectrice de $\widehat{FAF'}$.

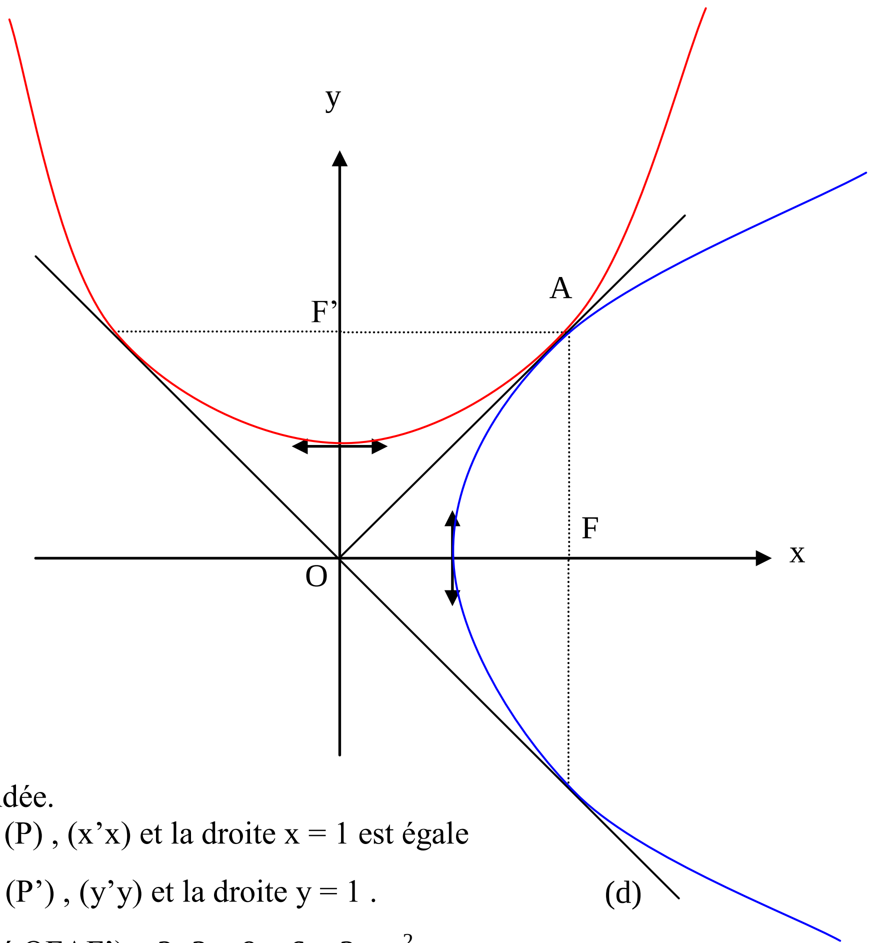
1. (d) : y = –x .

$(d)\cap(P)$: $x^2 = 2x - 1$; racine double $x' = x'' = x_A$.

$(d)\cap(P')$: $y^2 = 2y - 1$; racine double $y' = y'' = y_A$.

► Ou (d) est la symétrique de (OA) par rapport à l’axe focal (axe de symétrie) de (P) donc (d) est une tangente à (P) .De même (d) est symétrique de (OA) par rapport à l’axe focal (y’y) de (P’).

2.



3. S est l’aire demandée.
   L’aire limitée par (P) , (x’x) et la droite x = 1 est égale

   à laire limitée par (P’) , (y’y) et la droite y = 1 .

   S = (l’aire du carré OFAF’) – 2×3 = 9 – 6 = 3 cm^2 .