Coniques

Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points A(1,0) , $B\left(-1,\sqrt{3}\right)$, $B'\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ et $\Omega\left(-1,0\right)$. Soit (E) l'ellipse de centre Ω passant par et de sommets secondaires B et B'.

1. Montrer que A est un sommet principal de (E).
2. Déterminer les foyers F et F' , l'excentricité e et les directrices associées (D) et (D') de (E).
3. Déterminer une équation cartésienne de (E).
4. Déterminer les points M_1 et M_2 d'intersection de (E) et l'axe des ordonnées. Tracer (E).
5. a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (E) en M_1.

   b) Soit H et H' les projetés orthogonaux respectivement des foyers F et F' sur (T).
   Montrer que FH. F'H'= 3.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé R = $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit la courbe (P) d'équation $2x + 3y^2 + 4y - 1 = 0$.

1. a) Montrer que (P) est une parabole dont on déterminera le sommet S, le foyer F et la directrice (D).

   b) Construire (P).

2. Soit M_0 le point de (P) d'abscisse 1 et d'ordonnée y_0 positive.

   a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (P) au point M_0.

   b) Donner une équation de la perpendiculaire (N) à (T) en M_0.

3. (T) coupe l'axe focal (Δ) de (P) au point I et (N) coupe (Δ) en J .

   a) Montrer que F est le milieu du segment [IJ].

   b) Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur (Δ), montrer que : JK = $\frac{1}{3}$.

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne la conique (C_m) d'équation : $2mx^2 + (m+1)y^2 - 8(m-1)x - 2m - 1 = 0$ où m est un paramètre réel différent de -1.

1) Pour quelle valeur de m la conique (C_m) est-elle une parabole ?

   Déterminer alors son sommet, son foyer et sa directrice.

Coniques

2) Dans cette question on prend m = 2 .

a- Déterminer la nature, le centre et les sommets de l'axe focal de (C_2)

b- La conique (C_2) coupe l'axe des ordonnées aux points G et L ;

écrire des équations des tangentes à (C_2) en ces points.

c- Calculer l'aire du domaine limité par (C_2) et son cercle principal .

3) Soit f la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2} - x^2}$ et (T) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Démontrer que (T) est une partie d'une courbe (C_m) ; déterminer dans ce cas la nature et les éléments de (C_m) .

b- On désigne par (D) le domaine limité par (T) et l'axe des abscisses.

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que z' = f(z) = $z^2 - (3-i)z + 4 - 3i$.
On pose z = x + iy et z' = x' + iy' .

1) Déterminer les points M tels que f(z) = 0.

2) Calculer x' et y' en fonction de x et y.

3) a- Démontrer que , lorsque M' décrit l'axe des ordonnées, le point M décrit la courbe (C) d'équation $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$.
b- Déterminer la nature de (C) et préciser son centre I .
c- Déterminer les sommets , les foyers , les asymptotes et les directrices de (C).
d- Tracer la courbe (C) .
e- Ecrire une équation de la tangente (T) et une équation de la normale (N) à la courbe (C) au point E(2 ; 1) .

Coniques

Corrigés

Solution 1 :

1. Ω est le centre de (E) et B et B' sont les sommets secondaires de (E) alors la droite des abscisses $(O,\vec{i})$, la médiatrice du segment [BB'], est donc l'axe focal de (E) .

   Comme A est un point commun à (E) et $(O,\vec{i})$ alors A est un sommet principal de (E).

2. On pose, avec les notations habituelles : $a=\Omega A=2$ et $b=\Omega B=\sqrt{3}$.

   On constate que a > b ; la droite $(O,\vec{i})$ est bien l'axe focal de (E).

   La distance focale de (E) est : $2c=2\sqrt{a^2-b^2}=2$ donc $c=1$.

   L'excentricité e est : $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

   Considérons les repères R = $(O,\vec{i},\vec{j})$ et R'=$(\Omega,\vec{i},\vec{j})$,

   M(X, Y)$_{R'}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ et M(x, y)$_R$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

   $$\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X=x+1 \\ Y=y \end{cases}$$

   Il en résulte que :

	Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
Les foyers	F(1,0) et F'(-1,0)	F = O et F'(-2, 0)
Les directrices	$D: x=4$ et $D': x=-4$	$D: x=3$ et $D': x=-5$

3. Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, (E) a pour équation réduite $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1$.

   Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, (E) a pour équation cartésienne $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

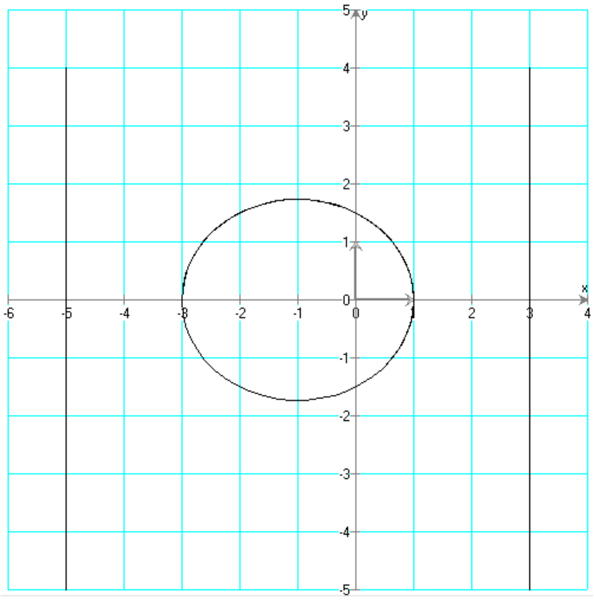
4. Pour déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 d'intersection de (E) et de $(O,\vec{j})$,

   on résout le système $\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \\ x=0 \end{cases}$.

   On obtient : $\frac{1}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Leftrightarrow y^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}$ ou $y=\frac{3}{2}$.

   Ainsi : $M_1\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ et $M_2\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

Coniques



5. a)

	Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
M_1	$M_1\left(1,\frac{3}{2}\right)$	$M_1\left(0,\frac{3}{2}\right)$
(T)	$\frac{1.X}{4}+\frac{\frac{3}{2}Y}{3}=1 \Leftrightarrow X-2Y-4=0$	$(x+1)-2y-4=0$

D'où (T) : x – 2y - 3 = 0.

b) H étant le projeté orthogonal du foyer F sur la tangente (T) donc FH = d(F, T).

De même F'H'= d(F', T).

On a ainsi : $FH=\frac{|-3|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$ et $F'H'=\frac{|-2-3|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}$. Par conséquent : FH. F'H'= 3.

Solution 2 :

1. a) $2x + 3y^2 + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x+3\left(y^2+\frac{4}{3}y\right)-1=0 \Leftrightarrow 2x+3\left[\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right]-1=0$

$$\Leftrightarrow 2x+3\left[\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right]-1=0 \Leftrightarrow 2x+3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=-2x+\frac{7}{3} \Leftrightarrow \left(y+\frac{2}{3}\right)^2=-2.\frac{1}{3}.\left(x-\frac{7}{6}\right)$$

Coniques

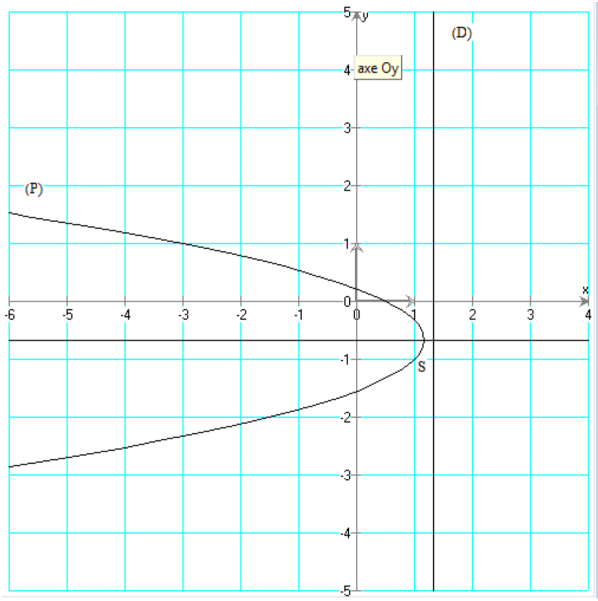
Posons $\begin{cases} X = x - \dfrac{7}{6} \\ Y = y + \dfrac{2}{3} \end{cases}$ et $S\left(\dfrac{7}{6}, -\dfrac{2}{3}\right)$

et Considérons les repères R = $(O,\vec{i},\vec{j})$ et R'= $(S,\vec{i},\vec{j})$.

Dans le repère R, (P) est d'équation réduite $Y^2 = -2.\dfrac{1}{3}.X$. Il en résulte que (P) est une parabole de sommet $S\left(\dfrac{7}{6}, -\dfrac{2}{3}\right)$, d'axe focal $(S,\vec{i}) : Y = 0$ d'où $(S,\vec{i}) : y = -\dfrac{2}{3}$ et de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$.

	Dans $(S,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
Foyer	$F\left(-\dfrac{1}{6}, 0\right)$	$F\left(1, -\dfrac{2}{3}\right)$
Directrice	$D : X = \dfrac{1}{6}$	$D : x = \dfrac{4}{3}$

b)



2. a) Pour déterminer les coordonnées du point M_0, on résout le système

$$\begin{cases} 2x + 3y^2 + 4y - 1 = 0 \\ x = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

On obtient l'équation du second $3y^2 + 4y - 7 = 0$ dont les solutions sont :

$y' = 1$ et $y'' = -\dfrac{7}{3}$.

Coniques

Ainsi $M_0(-3,1)$.

	Dans $(S,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
M_0	$M_0\left(-\frac{25}{6},\frac{5}{3}\right)$	$M_0(-3,1)$
(T)	$\frac{5}{3}Y=-\frac{1}{3}\left(X-\frac{25}{6}\right)$ $\Leftrightarrow 6X+30Y-25=0$	$6\left(x-\frac{7}{6}\right)+30\left(y+\frac{2}{3}\right)-25=0$ $\Leftrightarrow 6x+30y-12=0$

Par conséquent , la tangente (T) est d'équation x + 5y - 2 = 0.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (T) donc $\vec{u}$ devient un vecteur normale à (N).

(N) : -5x + y + c = 0 où c est le réel de façon que les coordonnées de M_0 vérifient l'équation à savoir $-5.(-3)+1+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad c=14$. On conclut que (N) : 5x – y + 14 = 0.

3. a) On rappelle que l'axe (Δ) de (P) est le droite d'équation $y=-\frac{2}{3}$.

Soit $\{I\}=T\cap\Delta$ et comme $\begin{cases}x+5y-2=0\\ y=-\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{16}{3}\\ y=-\frac{2}{3}\end{cases}$ donc $I\left(\frac{16}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Soit $\{J\}=N\cap\Delta$ et comme $\begin{cases}5x-y+16=0\\ y=-\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{10}{3}\\ y=-\frac{2}{3}\end{cases}$ donc $J\left(-\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

Par suite le milieu du segment [IJ] a pour coordonnées $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ qui n'est autre que le foyer F de (P).

b) Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur (Δ),

son ordonnée est $y_K=-\frac{2}{3}$ et son abscisse est celle de M donc $x_K=-3$;

par suite $K\left(-3,-\frac{2}{3}\right)$ et $JK=\left|-3-\left(-\frac{10}{3}\right)\right|=\frac{1}{3}$.

Coniques

Solution 3:

1. (C_m) est une parabole $\Leftrightarrow$ $2m(m+1)=0$ $\Leftrightarrow m=0$ (car $m \neq -1$)

$(C_o) : y^2 + 8x - 1 = 0$ ou encore $(C_o) : y^2 = -8(x - \frac{1}{8})$ donc (C_o) est une parabole de paramètre $p = 4$ de sommet $S(\frac{1}{8}\,;0)$ de foyer $F(-\frac{15}{8}\,;0)$ et de directrice d'équation $x = \frac{17}{8}$

2. a) $(C_2) : 4x^2 + 3y^2 - 8x - 5 = 0$ ou encore $(C_2) : \dfrac{(x-1)^2}{\frac{9}{4}} + \dfrac{y^2}{3} = 1$;

On note $a = \frac{3}{2}$ et $b = \sqrt{3}$, (C_2) est donc une ellipse de centre $O'(1\,;0)$ de sommets principaux $B(1, \sqrt{3})$ et $B'(1\,;-\sqrt{3})$.

b) Si $x = 0$ alors $y = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{5}{3}}$; $G(0\,;\sqrt{\frac{5}{3}})$ et $L(0\,;-\sqrt{\frac{5}{3}})$

$8x + 6yy' - 8 = 0$; donc $y' = \dfrac{4-4x}{3y}$. $y'_G = \dfrac{4}{\sqrt{15}}$ et $y'_L = -\dfrac{4}{\sqrt{15}}$

$(T_G) : y = \dfrac{4}{\sqrt{15}}x + \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ et $(T_L) : y = -\dfrac{4}{\sqrt{15}}x - \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

c) A = aire(cercle principal) – aire(C_2) = $\pi a^2 - \pi ab = 3\pi(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

3. a) $(T) : y = \sqrt{\dfrac{3}{2} - x^2}$; (T) est une partie de la courbe d'équation $y^2 = \dfrac{3}{2} - x^2$ ou $x^2 + y^2 = \dfrac{3}{2}$ qui est celle de (C_1).

(T) est une partie du cercle (C_1) de centre O et de rayon $r = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

b) $V = \pi \displaystyle\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} f^2(x)dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (\frac{3}{2} - x^2)dx = 2\pi \left[\frac{3}{2}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pi\sqrt{6}$

ou encore: (T) est un demi cercle, donc le solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses est une sphère de centre O et de rayon $r = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi\sqrt{6}$

Coniques

Solution 4 :

1. $z' = 0 \Leftrightarrow z^2 - (3-i)z + 4 - 3i = 0$; son discriminant est $\Delta = -8 + 6i = (1+3i)^2$

   les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{3-i+1+3i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \dfrac{3-i-1-3i}{2} = 1 - 2i$.

2. $x' + iy' = x^2 - y^2 - (3-i)(x+iy) + 4 - 3i$; Il en résulte que $x' = x^2 - y^2 - 3x - y + 4$ et $y' = 2xy - 3y + x - 3$.
3. a) Si $x' = 0$ alors $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$;

   b) $(x-\frac{3}{2})^2 - (y+\frac{1}{2})^2 = -2 \Leftrightarrow -\dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{2} + \dfrac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{2} = 1$;

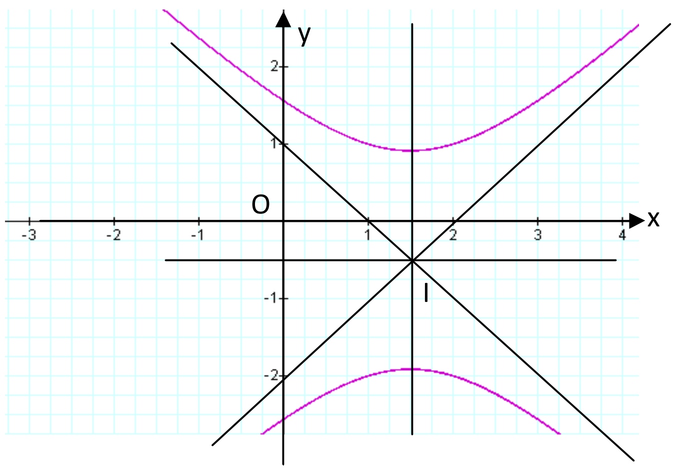
   Par translation de vecteur $\vec{OI} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$, cette équation devient $-\dfrac{X^2}{2} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$;

   $a = b = \sqrt{2}$, $c^2 = 2a^2 = 4$; $c = 2$. (C) est une hyperbole équilatère de centre $I(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

   c)

	Dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$	Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Sommets	$A(0, \sqrt{2})$; $A'(0, -\sqrt{2})$	$A(\frac{3}{2}, \sqrt{2} - \frac{1}{2})$; $A'(\frac{3}{2}, -\sqrt{2} - \frac{1}{2})$
Foyers	$F(0, 2)$; $F'(0, -2)$	$F(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; $F'(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$
Asymptotes	$Y = X$ ou $Y = -X$	$y = x - 2$ ou $y = -x + 1$
Directrices	$Y = \frac{a^2}{c} = 1$ ou $Y = -1$	$y = \frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{3}{2}$

   d)



   e) $2x - 2yy' - 3 - y' = 0 \Leftrightarrow y' = \dfrac{2x-3}{1+2y}$; $y'_E = \dfrac{1}{3}$. (T) : $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow$ (T) : $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$

   (N) : $y = -3x + 7$.