Congruence (2)

Exercice 1 :

Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est un multiple de 13.

Exercice 2 :

1. Montrer que $3^{512} - 2^{256}$ est un multiple de 7.
2. Montrer que 7 divise $2\,222^{5\,555} + 5\,555^{2\,222}$.

Exercice3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 4 :

Montrer que 343 divise $2^{147} - 1$.

Exercice 5 :

Déterminer le plus petit entier naturel n, $n \geqslant 2$, tel que $\sum_{k=0}^{n} k^2$ soit un carré parfait.

Exercice 6 :

Montrer que 20 801 divise $20^{15} - 1$.

Exercice 7:

On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels (m, n) , solutions de l'équation : $2^m - 3^n = 1$ (1).

1. Soit k un entier naturel.
   a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8.
2. Soit m et n deux entiers naturels, un couple solution de l'équation (1).

   Montrer, à l'aide de 1°, que $m \leqslant 2$.

Congruence (2)

3. En déduire tous les couples (m, n) d'entiers naturels, solutions de l'équation (1).

Exercice 8 :

Soient m, n et p trois entiers relatifs tels que $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0 \pmod 7$.
Montrer que $m\,n\,p \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 9 :

1. Soit n un entier naturel.

Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 9 ?
2. Existe-t-il des quadruplets (x, y, z, t) d'entiers naturels tels que

$x^3 + y^3 + z^3 \equiv 4 \pmod 9$.

Exercice 10 :

1. Soit n *en entier naturel*. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 7 ?
2. Existe-t-il des couples (x, y) d'entiers naturels tels que $7x - 4y^3 = 1$?

Exercice 11 :

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $3^{10} + 1$ par 10 ?
   En déduire le reste de la division euclidienne de $7^{10} + 1$ par 10.
2. Soit r *un entier naturel*, $0 \leqslant r \leqslant 9$. Montrer que 10 divise $r^{10} + 1$ si, et seulement si, $r \in \{3, 7\}$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que 10 divise $x^{10} + 1$.

Congruence (2)

Corrigé

Exercice 1 :

On sait que : $4^{35} + 9^{35} = 2^{70} + 3^{70}$

Et que, pour tous entiers naturels a, b et n :

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^k b^{n-k}.$$

Il résulte que l'on a :

$$4^{35} + 9^{35} = (4+9)\sum_{k=0}^{34}(-1)^k 4^k 9^{34-k} = 13 \times \sum_{k=0}^{34}(-1)^k 2^{2k} 3^{68-2k}$$

Donc $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13 et le quotient de la division de $4^{35} + 9^{35}$ par 13 est $\sum_{k=0}^{34}(-1)^k 2^{2k} 3^{68-2k}$.

Exercice 2

1. On sait que : $3^{512} - 2^{256} = 9^{256} - 2^{256}$

Et que pour tout entiers naturel a et b : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Il résulte que l'on a :

$$3^{512} - 2^{256} = 9^{256} - 2^{256} = (9-2)\sum_{k=0}^{255} 9^k \times 2^{255-k} = 7 \times \sum_{k=0}^{255} 3^{2k} \times 2^{255-k}$$

Cette décomposition montre que : $3^{512} - 2^{256}$ est divisible par 7 et le quotient de la division de $3^{512} - 2^{256}$ par 7 est $\sum_{k=0}^{255} 3^{2k} \times 2^{255-k}$

2. $1\,111 = 11 \times 101$, $2\,222 = 2 \times 11 \times 101$, $5\,555 = 5 \times 11 \times 101$
$2\,222 \equiv 3 \pmod 7$ et $3^{11} = 177\,147$ donc $3^{11} \equiv 5 \pmod 7$
il en résulte que : $2\,222^{11} \equiv 5 \pmod 7$
Or $5^5 = 3\,125$ donc $5^5 \equiv 3 \pmod 7$

Congruence (2) Corrigé

d'où : $2\,222^{55} \equiv 3 \pmod 7$ et $2\,222^{5\,555} \equiv 3^{101} \pmod 7$
On a : $5\,555 \equiv -3 \pmod 7$ donc $5\,555^{11} \equiv -3^{11} \pmod 7$
ou encore $5\,555^{11} \equiv -5 \pmod 7$ d'où $5\,555^{11} \equiv 2 \pmod 7$
$5\,555^{22} \equiv 4 \pmod 7$ donc $5\,555^{22} \equiv -3 \pmod 7$ d'où $5\,555^{2\,222} \equiv -3^{101} \pmod 7$
Par suite : $2\,222^{5\,555} + 5\,555^{2\,222} \equiv 3^{101} - 3^{101} \pmod 7$
$\equiv 0 \pmod 7$
Ainsi 7 divise $2\,222^{5\,555} + 5\,555^{2\,222}$.

Exercice 3

Pour $n = 1$, $(n+1)^n - 1 = 1$, $n^2 = 1$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Pour $n \geqslant 2$, d'après la **formule du binôme de Newton** $(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^k$

Le terme correspondant à $k = 0$ est 1.
Le terme correspondant à $k = 1$ est n^2.
A partir de $k = 1$, on peut mettre n^2 en facteur :

$$(n+1)^n = 1 + n^2\left(1 + \sum_{k=2}^{k} C_n^k n^{k-2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad (n+1)^n - 1 = n^2\left(1 + \sum_{k=2}^{k} C_n^k n^{k-2}\right)$$

Et cette décomposition montre que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$ et le quotient de $(n+1)^n - 1$ par n^2 est :

$$\begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1 \\ 1 + \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^k & \text{pour } n > 1 \end{cases}$$

Exercice 4

On a : $343 = 7^3$, $147 = 3 \times 7^2$ donc $2^{147} = 2^{3\times 7^2} = 8^{7^2} = (7+1)^{7^2}$

D'après la **formule du binôme** :

$$(7+1)^{7^2} = \sum_{k=0}^{7^2} C_{7^2}^k 7^k = 1 + C_{7^2}^1 7 + C_{7^2}^2 7^2 + \sum_{k=3}^{7^2} C_{7^2}^k 7^k = 1 + 7^3 + 24 \times 7^4 + 7^3 \sum_{k=3}^{7^2} C_{7^2}^k 7^{k-3}$$

Congruence (2) Corrigé

Donc $(7+1)^{7^2} = 1+7^3\left(1+24\times 7+\sum_{k=3}^{7^2} C_{7^2}^k 7^{k-3}\right)$

Cette formule montre que :

$7^3 = 343$ divise $2^{147} - 1$ et le quotient de $2^{147} - 1$ par 343 est $169 + \sum_{k=3}^{7^2} C_{7^2}^k 7^{k-3}$

Exercice 5

1. Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

En effet :

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$$

On supposons : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$

et on montre que : $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}.$$

Factorisons $2n^2+7n+6$.

Pour cela résolvons d'abord l'équation d'inconnue réelle x : $2x^2+7x+6=0$.

Le discriminant est $\Delta = 49-48 = 1$ donc l'équation admet deux racines distinctes $x' = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}$ et $x'' = \frac{-7-1}{4} = -2$.

Par suite, pour tout x réel : $2x^2+7x+6 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+2) = (2x+3)(x+2)$.

Il en résulte que : $2n^2+7n+6 = (2n+3)(n+2)$.

Congruence (2) Corrigé

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

C'est ce qu'il faut démontrer.

Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0 = 0^2$ est le carré de 0.

Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{1} k^2 = 0^2 + 1^2 = 1^2$ $k^2 = 1$ est le carré de 1.

Pour $n \geqslant 2$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{24}$.

Comme $2n + 1$ n'a aucun facteur premier commun avec ses voisins $2n$ et $2n + 2$, pour que $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{24}$ soit un carré parfait, il faudra que l'un des deux cas suivants soit réalisé :

1. $2n + 1$ est le carré d'un nombre impair : $2n + 1 = (2m + 1)^2 \Rightarrow n = 2m(m + 1)$,
2. $2n + 1$ est le produit par 3 ($24 = \mathbf{3} \times 8$) du carré d'un nombre impair : $2n + 1 = 3(2m + 1)^2$ $\Rightarrow n = 6m^2 + 6m + 1$, puisque, si $2n + 1$ est divisible par 3, le quotient doit être un carré de nombre impair.

Regardons les premières valeurs possibles pour n et les valeurs correspondantes de $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

	$n = 2m(m+1)$	$\sum_{k=0}^{n} k^2$	$n = 6m^2 + 6m + 1$	$\sum_{k=0}^{n} k^2$
m = 0			1	1
m = 1	4	30	13	819
m= 2	12	650		
m = 3	24	$4900 = 70^2$		

Donc la plus petite valeur trouvée de $n \geqslant 2$ qui donne un $\sum_{k=0}^{n} k^2$ un carré parfait est $n = 24$ ou encore $\sum_{k=0}^{24} k^2 = 70^2$

Pour $n = 24$, $\frac{n}{6} = 4$ est un carré, $n + 1 = 25$ est un carré, et $2n + 1 = 49$ est un carré.

Congruence (2) Corrigé

Exercice 6.

Commençons par décomposer 20 801 en facteurs premiers.
2 + 8 + 1 = 11, donc 20 801 est divisible par 11 et le quotient est 1 891.
1 891 = 30 × 60 + (30 + 60) + 1 = 31 × 61.
31 et 61 sont premiers.
20 801 = 11 × 31 × 61.

$10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^5 \equiv (-1)^5 \pmod{11} \Rightarrow 10^5 \equiv -1 \pmod{11}$
$2^5 = 32$ donc $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$
$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ et $10^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 \equiv 2^5 \times 10^5 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 \equiv 1 \pmod{11}$
$\Rightarrow 20^{15} \equiv 1 \ (11)$
11 divise $20^{15} - 1$.

$5^3 = 125 = 2 \times 61 + 3$ donc $5^3 \equiv 3 \pmod{61}$
$4^3 = 64 = 1 \times 61 + 3$ donc $4^3 \equiv 3 \pmod{61}$
D'où par produit : $20^3 \equiv 3^2 \pmod{61}$ et en élevant à la puissance 5, on obtient :

$20^{15} \equiv 3^{10} \pmod{61}$

$3^5 = 243 = 3 \times 61 + 60 = 4 \times 61 - 1$ donc $3^5 \equiv -1 \pmod{61}$
D'où $3^{10} \equiv 1 \pmod{61}$ et par suite : $20^{15} \equiv 1 \pmod{61}$
61 divise $20^{15} - 1$.

$2^5 = 32$ donc $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$
$4^{15} = (2^5)^3$ donc $4^{15} \equiv 1 \pmod{31}$
$20^{15} = 4^{15} \times 5^{15}$ donc $20^{15} \equiv 5^{15} \pmod{31}$.
$125 = 4 \times 31 + 1 \Rightarrow 5^3 \equiv 1 \pmod{31}$.
D'où $5^{15} \equiv 1 \pmod{31}$.
$20^{15} \equiv 5^{15} \pmod{31}$ et $5^{15} \equiv 1 \pmod{31}$ donc $20^{15} \equiv 1 \pmod{31}$
31 divise $20^{15} - 1$.

Si les nombres premiers 11, 31, 61, divisent $20^{15} - 1$, leur produit 20 801 divise

$20^{15} - 1$.

Ainsi 20 801 divise $20^{15} - 1$.

Exercice 7 :

1.a) $9 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 9^k \equiv 1 \pmod{8}$.

b)

Congruence (2) Corrigé

Si n est pair, $n = 2k$, $3^n = 9^k$ donc $3^n \equiv 1 \pmod 8$ d'où $3^n + 1 \equiv 2 \pmod 8$.
Si n est impair, $n = 2k + 1$, $3^n = 9^k \times 3$ donc $3^n \equiv 3 \pmod 8$ d'où $3^n + 1 \equiv 4 \pmod 8$.

2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, un couple solution de l'équation $2^m - 3^n = 1$.

On a alors $3^n + 1 = 2^m$.
Le reste de la division de $3^n + 1$ par 8 ne peut être que 2 ou 4.
Le reste de la division de 2^m par 8 ne peut être 2 ou 4 que si 2^m lui-même est égal à 2 ou 4, donc m est égal à 1 ou à 2.

Ainsi : $2^m - 3^n = 1 \Rightarrow m = 1$ ou $m = 2$.

3. Pour $m = 1$, $2^m = 2$.
$2 - 3^n = 1 \Rightarrow 3^n = 1$, donc $n = 0$.

Pour $m = 2$, $2^m = 4$.
$4 - 3^n = 1 \Rightarrow 3^n = 3$, donc $n = 1$.

L'équation $2^m - 3^n = 1$ n'a donc, dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que deux solutions.

$2^m - 3^n = 1 \Rightarrow (m, n) = (1, 0)$ ou $(m, n) = (2, 1)$.

Exercice 8 :

1. Les restes de la division par 7 des cubes des entiers naturels de 0 à 6 sont donnés par le tableau suivant :

R	0	1	2	3	4	5	6
r^3	0	1	8	27	64	125	216
Reste modulo 7	0	1	1	6	1	6	6

$6 \equiv -1 \pmod 7$

2. On peut avoir $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0 \pmod 7$ de deux façons :
— ou bien les trois nombres aient un cube congru à 0 modulo 7, auquel cas ils sont tous trois multiples de 7 et $m\,n\,p \equiv 0 \pmod 7$.
— ou bien un seul des trois nombres ait un cube congru à 0 modulo 7, un autre ait un cube congru à 1 modulo 7 et le dernier un cube congru à - 1 modulo 7. Dans ce dernier cas encore, celui des trois nombres dont le cube est congru à 0 modulo 7 est multiple de 7 et le produit $m\,n\,p$ est encore congru à 0 modulo 7.
Par suite : $m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0\ (7) \Rightarrow m\,n\,p \equiv 0\ (7)$.

Congruence (2) Corrigé

Exercice 9 :

1. Les cubes des entiers de 0 à 8 sont :

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512
Reste modulo 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Tout entier naturel s'écrit $n = 9k + r$, $0 \leqslant r \leqslant 8$.
Son cube est un multiple de 9, plus r^3.
Le reste de la division du cube par 9 est le reste de la division de r^3 par 9.

Ainsi : Les restes possibles de la division euclidienne d'un cube par 9 sont 0, 1 et 8.

2. En appelant a, b, c les restes des divisions de x^3, y^3, z^3, par 9, il faudrait que l'on ait : $a + b + c \equiv 4\ (9)$.
Ce n'est pas possible, avec a, b, c dans {0, 1, 8}.
Il n'existe aucun quadruplet (x, y, z) d'entiers naturels tels que $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 4\ (9)$.

Exercice 10 :

1. Tout entier naturel s'écrit sous l'une des formes : $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, $7k \pm 3$.
Les cubes des entiers naturels s'écrivent donc sous l'une des formes : $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 8$, $7k \pm 27$.
Or 8 est congru à 1 module 7 et 27 est congru à - 1 module 7.
- 1 est congru à 6 modulo 7.
Donc les restes possibles de la division euclidienne d'un cube par 7 sont 0, 1, 6.

2. L'équation $7x - 4y^3 = 1$ montre que $-4y^3 \equiv 1\ (\text{mod } 7)$
Or 7 est premier et $-4 \equiv 3\ (\text{mod } 7)$
La relation $3 \times 5 = 2 \times 7 + 1$, montre que l'inverse modulo 7 de 3 est 5.
La relation $-4y^3 \equiv 1\ (\text{mod } 7)$ est donc équivalente à $y^3 \equiv 5\ (\text{mod } 7)$.
La question précédente montre qu'elle n'a pas de solution, car aucun cube n'est congru à 5 modulo 7.

Ainsi, Il n'existe aucun couple (x, y) d'entiers naturels tels que $7x - 4y^3 = 1$

Exercice 11 :

1. $3^{10} + 1 = (3^2)^5 + 1$ est divisible par $3^2 + 1 = 10$, parce que $a^{2k+1} + 1$ est divisible par $(a + 1)$. Donc $3^{10} + 1 \equiv 0\ (10)$

$7^{10} + 1 = (7^2)^5 + 1$ est divisible par $7^2 + 1 = 50$, parce que $a^{2k+1} + 1$ est divisible par $(a + 1)$.
Comme 50 est divisible par 10, $7^{10} + 1$ est divisible par 10.

Congruence (2) Corrigé

On aurait pu écrire aussi : $7 \equiv -3\ (10)$, donc $7^{10} + 1 \equiv (-3)^{10} + 1 \pmod{10}$ ou encore

$7^{10} + 1 \equiv 3^{10} + 1 \pmod{10}$ d'où $7^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{10}$

2. Montrons d'abord que :

$$n^{10} + 1 \equiv a \pmod{10} \Leftrightarrow n^{10} \equiv a - 1 \pmod{10}, \text{ lorsque } 1 \leqslant a \leqslant 9.$$

En effet :

Dire que $n^{10} + 1$ est congru à a modulo 10, c'est dire que le chiffre des unités de l'écriture décimale de $n^{10} + 1$ est a.
C'est donc dire que le chiffre des unités de l'écriture décimale de n^{10} est $a - 1$, puisque, par hypothèse, a est compris entre 1 et 9.

Il résulte que l'on a : $n^{10} + 1 \equiv a \pmod{10} \Rightarrow (n^2)^{10} + 1 \equiv (a-1)^2 + 1 \pmod{10}$

$1^{10} + 1 = 2$ donc $1^{10} + 1 \equiv 2 \pmod{10}$.
$2^{10} + 1 = 1\,025$ donc $2^{10} + 1 \equiv 5 \pmod{10}$.
$3^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.
$4^{10} + 1 = (2^2)^{10} + 1$ donc $4^{10} + 1 \equiv (5-1)^2 + 1 \pmod{10}$ d'où $4^{10} + 1 \equiv 7 \pmod{10}$.
$5^{10} + 1 \equiv 6 \pmod{10}$, parce que le dernier chiffre de toute puissance de 5 est 5.
$6^{10} = (2^{10})(3^{10}) = (2^{10})(3^{10} + 1) - 2^{10}$ donc $6^{10} \equiv -5 \pmod{}$ d'où $6^{10} \equiv 5 \pmod{10}$.
$7^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.
$8^{10} + 1 = 2^{10} \times 4^{10} + 1$ donc $8^{10} + 1 \equiv 4 \times 6 + 1 \pmod{10}$ d'où $8^{10} + 1 \equiv 5 \pmod{10}$.
$9^{10} + 1 = (3^{10})^2 + 1$ donc $9^{10} + 1 \equiv 9^2 + 1 \pmod{10}$ d'où $9^{10} + 1 \equiv 2 \pmod{10}$.

Le chiffre des unités de l'écriture décimale de $r^{10} + 1$, $1 \leqslant r \leqslant 9$, peut être 0, 2, 5, 7. Il est 0 si, et seulement si, $r \in \{3, 7\}$.

Ainsi : $1 \leqslant r \leqslant 9$ et $r^{10} + 1 \equiv 0\ (10) \Leftrightarrow r \in \{3, 7\}$.

3. x ne peut pas être multiple de 10, puisque $(10k)^{10}$ est multiple de 10 et on a, évidemment

$(10k)^{10} + 1 \equiv 1\ (10)$.
Tout entier naturel non multiple de 10 s'écrit d'une façon unique sous la forme

$x = 10k + r$, $1 \leqslant r \leqslant 9$.

$$x^{10} + 1 = (10k + r)^{10} + 1 \quad \text{donc} \quad x^{10} + 1 \equiv r^{10} + 1 \pmod{10}$$

L'équation $x^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{10}$ s'écrit alors $r^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.
Sa solution est donnée par $r \in \{3, 7\}$.

Ainsi : les solutions de l'équation $x^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{10}$ sont les entiers naturels dont l'écriture décimale se termine par un 3 ou par un 7.