QCM 2 : Nombres complexes

Pour chacune des huit questions suivantes une seule des trois propositions est exacte.

On indiquera le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

La justification est exigée.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Une solution de l'équation $2z+\bar{z}+3-i=0$ est :
   a) 1 + i ; b) 1 - i ; c) -1 + i.
2. Soit z un nombre complexe quelconque , $|z+i|$ est égal à :

   a) $|z|+1$; b) $|z-i|$; c) $|i\bar{z}+1|$.

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est

   a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$; b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$; c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$.

4. Soit n un entier relatif. Le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est imaginaire pur si, et

   seulement si :
   a) n =3 ; b) $n=6k+3, k\in\mathbb{Z}$; c) $n=6k, k\in\mathbb{Z}$.
5. Soit A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|iz+i|$ est :

   a) La droite (AB) ; b) le cercle de diamètre [AB] ; c) la perpendiculaire à (AB) passant par O.
6. Soit Ω le point d'affixe 1 – i. L'ensemble des points M d'affixe z = x + iy , où x et y sont réels, vérifiant $|z-1+i|=|3+4i|$ a pour équation :

   a) $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{7}{2}$; b) $\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2=5$; c) $z=1-i+5e^{i\theta}, \theta\in\mathbb{R}$
7. Soit A , B et C les points d'affixes respectives 4 , 3i et 1 – 4i. Le triangle ABC est :
   a) isocèle en A ; b) rectangle en A ; c) isocèle et rectangle en A.
8. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 2 + 3i. l'affixe du point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme est :
   a) 2 + 6i ; b) -2 + 3i ; c) 2 - 3i.
9. Soit $z=1+i\sqrt{3}$.
   a) $z^3=8$; b) $z^3=8i$; c) $z^3=-8$.

QCM 2 : Nombres complexes

Solution :

1. c)

En effet :

- $2(-1+i)+\overline{(-1+i)}+3-i=-2+2i-1-i+3-i=0$.
- si l'on pose z = x + iy avec x et y sont réels , alors

$$2z+\bar{z}+3-i=0 \Leftrightarrow 2(x+iy)+(x-iy)+3-i=0$$
$$\Leftrightarrow 3x+3+i(y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Donc z = -1 + i.

2. c)

En effet :

Pour tout nombre complexe z , $|z+i|=|i|.|z+i|=|i(z+i)|=|iz-1|$

Et comme $|\bar{Z}|=|Z|$ alors $|z+i|=|iz-1|=\left|\overline{(iz-1)}\right|=|-i\bar{z}-1|$

Or $|-Z|=|Z|$ donc $|z+i|=|-i\bar{z}-1|=|i\bar{z}+1|$.

3. b)

En effet :

$$\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right)\equiv \arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\arg\left(\bar{z}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{2\pi}{3}+\arg(z)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{2\pi}{3}+\theta[2\pi]$$

4. b)

En effet :

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n \text{ est imaginaire pur } \Leftrightarrow \arg\left(\left(\sqrt{3}+i\right)^n\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow n\arg\left(\sqrt{3}+i\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow n\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow n=3+6k\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

QCM 2 : Nombres complexes

5. c)

En effet :

$|z-i|=|iz+i| \Leftrightarrow |z-i|=|i(z+1)| \Leftrightarrow |z-i|=|z-1| \Leftrightarrow AM=BM$

Donc l'ensemble des points M(z) vérifiant $|z-i|=|iz+i|$ est la médiatrice Δ du segment [AB]. Or $|0-i|=|i.0+i|=1$ donc $O\in\Delta$.

Ainsi , Δ est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par O.

6. c)

En effet :

- $|z-1+i|=|3+4i| \Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|=5 \Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|^2=25$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=25$$

Donc cet ensemble ne peut être qu'un cercle d'où la réponse exacte serait 6. c)

- $|z-1+i|=|3+4i| \Leftrightarrow |z-1+i|=5$ donc il existe un réel θ tel que $z-1+i=5e^{i\theta}$ ou encore $z=1-i+5e^{i\theta}$.

7. c)

En effet :

- $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1-4i-4}{3i-4}=\dfrac{-3-4i}{i(3+4i)}=\dfrac{-1}{i}=i$.

Il en résulte : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i| \Leftrightarrow \dfrac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=1 \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AB}=1 \Leftrightarrow AC=AB$

Et $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv \arg(i)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Il en résulte que le triangle ABC est isocèle, rectangle en A et direct.

- $AB=|z_B-z_A|=|-4+3i|=5$ et $AC=|z_C-z_A|=|-3-4i|=5$

  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-4).(-3)+3.(-4)=0$

  Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

  Ainsi le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

Pour préciser le sens d'orientation du triangle ABC, il suffit d'**ajouter une figure**.

8. a)

En effet :

OACB est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_C-z_B=z_A \Leftrightarrow z_C=z_B+z_A$

$\Leftrightarrow z_C=6+3i$

9. c)

En effet : $z=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z^3=8e^{i\pi}=-8$