

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On définit pour tout nombre complexe z différent de 0 et de (-3) , $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z+3)}$.

Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants : $f(1-i)$ et $f(1+i)$.

2. Ecrire sous forme algébrique : $(2+i)^3 + (1-2i)^3$

3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a) $3(z-i) - 3i(z-2+3i) = (i-1)(z+i)$

b) $z - 2\bar{z} = 9 + 2i$

4. Pour tout nombre complexe $z \neq i$, On pose $Z = \frac{z-1+2i}{z-i}$

a) Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des réels.

b) Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm)

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 1$ et $c = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On note I le milieu de $[A'B]$, J celui de $[B'C]$, K celui de $[C'A]$

On considère l'application f du plan, qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z$.

1. a) Déterminer les affixes a' , b' et c' des points A' , B' , C' images des points A, B et C par f .

b) Déterminer les affixes des points I, J et K.

2. Calculer les affixes des vecteurs : \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{IK} et \overrightarrow{KJ} .

3. Montrer que le triangle IJK est équilatéral.

4. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixes z tels que : $|z-2i|=2$.

a) Déterminer et construire l'ensemble (E)

b) Déterminer et construire l'image (E') de (E) par l'application f .

c) Donner une équation cartésienne de (E').


EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES
Exercice 3

Dans le plan complexe P , muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = i$.

On pose $Z = \frac{z-1}{iz+1}$ pour tout $z \neq i$

1. Déterminer les éventuelles valeurs de z telles que : $Z = 1 + 2i$
2. a) Montrer que $|iz+1| = |z-i|$
 b) Déterminer et tracer l'ensemble (E_1) des points M d'affixes z tels que $|Z| = 1$
3. a) En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels, vérifier que la partie réelle de Z est

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x+y-1}{x^2+(1-y)^2} \quad \text{et} \quad \text{que la partie imaginaire} \quad \operatorname{Im}(Z) = \frac{-x^2-y^2+x+y}{x^2+(1-y)^2}$$

- b) Déterminer et tracer l'ensemble (E_2) des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre réel.
- c) Déterminer et tracer l'ensemble (E_3) des points M d'affixes z tels que Z soit un imaginaire pur.

Exercice 4

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = -5(1+i\sqrt{3})$.

- 1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes : $z_1, z_2, \overline{z_1}, \frac{1}{z_1}$.
- 2) Soit Z le nombre complexe tel que $z_1 Z = z_2$.
 Ecrire Z sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
- 3) Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos(\frac{13\pi}{12})$ et $\sin(\frac{13\pi}{12})$.

Exercice 5

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E) suivante :

$$z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0 \quad \text{où } a \text{ est réel.}$$

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-2i(1-a)^2$.
 b) Déterminer en fonction de a les solutions z_1 et z_2 de (E).



EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

2. On désigne par M_1 et M_2 les images des solutions z_1 et z_2 dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note M le milieu du segment $[M_1M_2]$.

a) Vérifier que $z_M = \left(\frac{1+a}{2}\right)(1+i)$.

b) Déterminer alors l'ensemble des points M lorsque a décrit \mathbb{R} .

Exercice 6

1. On considère l'équation (E) $z^3 + 8 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $z^3 + 8 = (z + 2)(az^2 + bz + c)$.

b) Résoudre l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes

respectives $z_A = 2$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.

a) Faire une figure.

b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 7

On considère l'équation (E) : $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Partie A :

1. a. Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1 .

b. Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(\alpha z + \beta)$$

2. Résoudre (E)



EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Partie B :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $a = 1$, $b = 2 + 2i$ et $c = 1 - i$.

1. Représenter A, B et C.
2. Déterminer la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
4. Déterminer la valeur du complexe d tel que le complexe $\frac{c-d}{c} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
5. On note D le point d'affixe d. Quelle est la nature du quadrilatère OCDB ?

Exercice 8

Soit P le polynôme de variable complexe z défini par : $P(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$

1. Donner la forme algébrique de $P(iy)$ où $y \in \mathbb{R}$
2. En déduire que l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 4)(az^2 + bz + c)$
4. Résoudre alors $P(z) = 0$
5. On désigne par A, B, C, D les images des racines de l'équation $P(z) = 0$ dans un repère orthonormé

Montrer que ces 4 points sont sur un même cercle de centre Ω d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

$$1) f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z+3)}$$

$$f(1-i) = \frac{(1-i)^2 - 1}{(1-i)(1-i+3)} = \frac{1-2i-1-1}{4-i-4i^2-1} = -\frac{(1-2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$$

$$f(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^2 - 1}{z(z+3)} = \frac{\overline{z^2 - 1}}{z(z+3)} = \frac{\overline{z^2 - 1}}{\overline{z(z+3)}} = \overline{\left(\frac{z^2 - 1}{z(z+3)} \right)} = \overline{f(z)}$$

$$\text{Donc } f(1+i) = f(\overline{1-i}) = \frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$$

$$2) u = (2+i)^3 + (1-2i)^3 = 8+12i-6-i+1-6i-12-8i = -9-2i$$

$$3) a) 3(z-i) - 3i(z-2+3i) = (i-1)(z+1) \Leftrightarrow 3z - 3iz - iz + z = i - 1 - 3i - 9$$

$$\Leftrightarrow z(4-4i) = -10-2i \Leftrightarrow z = \frac{-10-2i}{4-4i}$$

$$\text{Or } \frac{-10-2i}{4-4i} = \frac{-5-2i}{2(1-i)} = -\frac{1}{2} \frac{(5+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4}i \quad \text{Donc } S = \left\{ -\frac{3}{4} - \frac{7}{4}i \right\}$$

$$b) z - 2\bar{z} = 9 + 2i \quad \text{Pour résoudre cette équation on pose: } z = x + iy, \bar{z} = x - iy$$

$$z - 2\bar{z} = 9 + 2i \Leftrightarrow -x + 3iy = 9 + 2i \Leftrightarrow x = -9 \text{ et } y = \frac{2}{3} \text{ d'où } z = -9 + \frac{2}{3}i$$

$$4) Z = \frac{z-1+2i}{z-i} \text{ avec } z \neq i. \text{ On pose } z = x + iy \text{ et } Z = X + iY$$

a) Ensemble des points $M(z)$ pour lesquels Le point $M'(Z)$ appartient à l'axe des réels (E)

$$\begin{aligned} X + iY &= \frac{x + iy - 1 + 2i}{x + iy - i} = \frac{(x-1) + i(y+2)}{x + i(y-1)} = \frac{[(x-1) + i(y+2)][x - i(y-1)]}{[x + i(y-1)] \cdot [x - i(y-1)]} \\ &= \frac{(x-1)x + (y+2)(y-1) - i(x-1)(y-1) + ix(y+2)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2 + i(3x + y - 1)}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \operatorname{Re}(Z) = X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = Y = \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$M' \text{ appartient à l'axe des réels signifie que } \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0$$

Donc (E) est la droite d'équation $3x + y - 1 = 0$ privé de son point A d'affixe i .

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

b) Ensemble des points $M(z)$ pour lesquels Le point $M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires (F)

$$\operatorname{Re}(Z) = X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(Z) = Y = \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

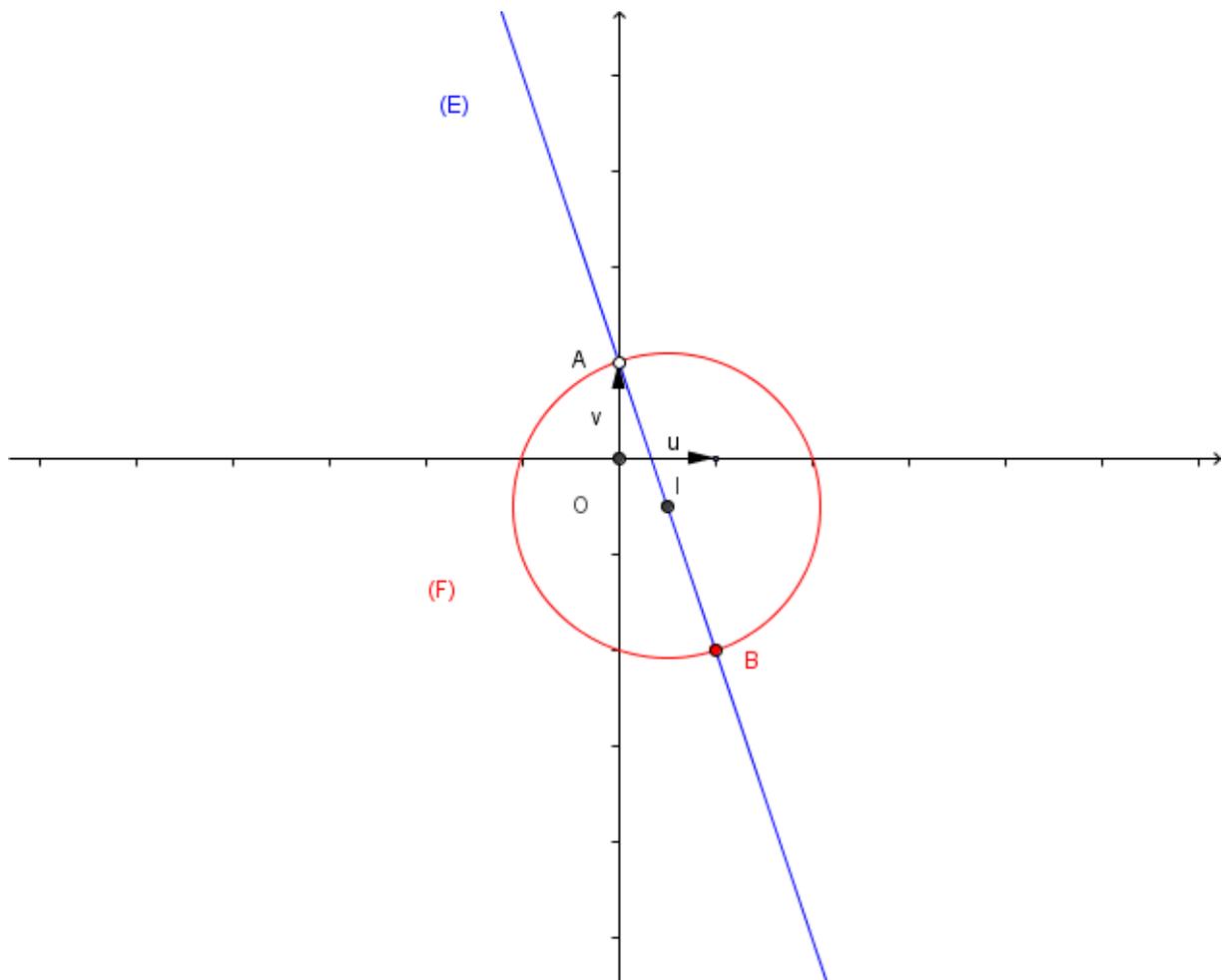
$M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires signifie que $\operatorname{Re}(Z) = 0$.

$$\Leftrightarrow X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

On reconnaît l'équation cartésienne du cercle Γ de centre le point $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ainsi l'ensemble (F) est le cercle d'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ privé du point $A(i)$.





EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 2

1)

$$a) f(A) = A' \Leftrightarrow a' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} a \Leftrightarrow a' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2i \Leftrightarrow a' = -\sqrt{3} + i$$

$$f(B) = B' \Leftrightarrow b' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} b \Leftrightarrow b' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$f(C) = C' \Leftrightarrow c' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow c' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$b) z_I = \frac{a'+b}{2} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{3} + i + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow z_I = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_J = \frac{b'+c}{2} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_K = \frac{c'+a}{2} \Leftrightarrow z_K = -\frac{1}{4} + i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$2) Z_{\overline{IJ}} = z_J - z_I \Leftrightarrow Z_{\overline{IJ}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow Z_{\overline{IJ}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z_{\overline{IK}} = z_K - z_I \Leftrightarrow Z_{\overline{IK}} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) ; Z_{\overline{KJ}} = z_J - z_K \Leftrightarrow Z_{\overline{KJ}} = \frac{3}{4} + i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$3) Z_{\overline{IJ}} \times \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = Z_{\overline{IK}}$$

$$\text{On a donc } Z_{\overline{IK}} = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times Z_{\overline{IJ}}$$

$$\text{D'une part } |Z_{\overline{IK}}| = \left| \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| \times |Z_{\overline{IJ}}| \Leftrightarrow IK = IJ \quad \text{car } \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$

$$\text{d'autre part } \arg(Z_{\overline{IK}}) = \arg \left[\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times Z_{\overline{IJ}} \right] = \arg \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arg(Z_{\overline{IJ}}) \quad (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \arg(Z_{\overline{IK}}) - \arg(Z_{\overline{IJ}}) = \arg \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2\pi) \quad \text{or } \arg \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

$$\arg\left(\frac{Z_{\overline{IK}}}{Z_{\overline{IJ}}}\right) - \arg\left(\frac{Z_{\overline{IK}}}{Z_{\overline{IJ}}}\right) = (\widehat{\vec{u}; \overline{IK}}) - (\widehat{\vec{u}; \overline{IJ}}) = (\widehat{\overline{IJ}; \overline{IK}}) (2\pi). \quad \text{Ainsi } (\widehat{\overline{IJ}; \overline{IK}}) = \frac{\pi}{3} (2\pi).$$

Donc le triangle IJK à deux côtés égaux et un angle égale à $\frac{\pi}{3}$, il est équilatéral.

Autre méthode: calcul des longueurs: IJ, IK et KJ.

4) Soit E l'ensemble des points M d'affixes z tels que: $|z - 2i| = 2$

a) $|z - 2i| = 2 \Leftrightarrow |z - z_A| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$, E est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

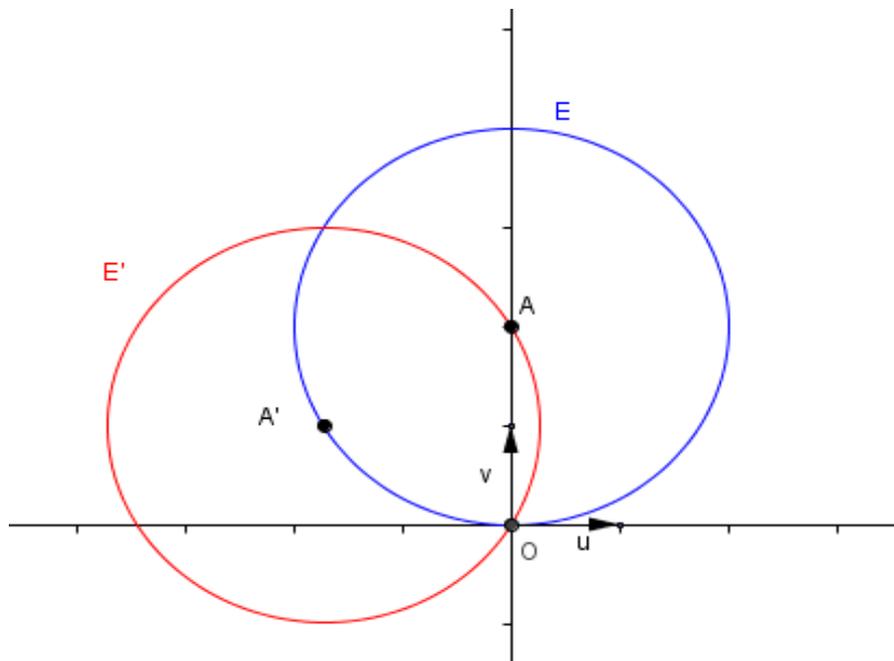
b) Soit E' l'image de E par la l'application $f : f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z$

$$\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ et } \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| = 1, \text{ donc on } \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

d'où: $\boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z}$, c'est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

L'image (E') de (E) par f est le cercle de centre A' image de A par f et de même rayon 2.

Construction :



EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 3

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Pour } z \neq i, \frac{z-1}{iz+1} = 1+2i &\Leftrightarrow z-1 = (1+2i)(iz+1) \Leftrightarrow z-1 = (-2+i)z+1+2i \\
 &\Leftrightarrow (3-i)z = 2+2i \Leftrightarrow (3+i)(3-i)z = (3+i)(2+2i) \\
 &\Leftrightarrow 10z = 4+8i \Leftrightarrow z = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ a) } |iz+1| = |i(z-i)| = |i| \cdot |z-i| = |z-i|.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Pour } z \neq i, |Z| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{iz+1} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|iz+1|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|z-i|} = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \\
 &\Leftrightarrow AM = BM.
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble (E_1) est la médiatrice du segment $[AB]$.

$$3. \text{ a) Si } z = x + iy, \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \text{ alors}$$

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{(x+iy)-1}{i(x+iy)+1} = \frac{(x-1)+iy}{(1-y)+ix} = \frac{[(x-1)+iy][(1-y)-ix]}{x^2+(1-y)^2} \\
 &= \frac{(x-1)(1-y)+xy+i[-x(x-1)+y(1-y)]}{x^2+(1-y)^2} = \frac{x+y-1+i[-x^2+x-y^2+y]}{x^2+(1-y)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \operatorname{Re}(Z) = \frac{x-y+1}{x^2+(1-y)^2} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = \frac{-x^2-y^2+x+y}{x^2+(1-y)^2}.$$

$$\text{b) } Z \text{ est réel } \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - y^2 + x + y = 0 \\ (x, y) \neq (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + y^2 - y = 0 \\ (x, y) \neq (0,1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ (x, y) \neq (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ (x, y) \neq (0,1) \end{cases}$$

L'ensemble (E_2) est donc le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point B.

$$\text{c) } Z \text{ est imaginaire pur } \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x, y) \neq (0,1) \end{cases}.$$

L'ensemble (E_3) est donc la droite d'équation $x - y + 1 = 0$ privé du point B.

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 4

$z_1 = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = -5(1+i\sqrt{3})$. Posons $\arg z_1 = \theta_1(2\pi)$ et $\arg z_2 = \theta_2(2\pi)$

1) Module et arguments des nombres complexes: $z_1, z_2, \bar{z}_1, \frac{1}{z_1}$

$$|z_1| = |5\sqrt{2}(1+i)| = 5\sqrt{2}|1+i| = 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 10$$

$$\text{On a } \cos \theta_1 = \sin \theta_1 = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta_1 = \frac{\pi}{4}(2\pi).$$

$$|z_2| = |-5(1+i\sqrt{3})| = 5|1+i\sqrt{3}| = 10.$$

$$\cos \theta_1 = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2} \text{ et } \sin \theta_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \theta_2 = -\frac{2\pi}{3}(2\pi).$$

$$|\bar{z}_1| = |z_1| = 10 ; \arg \bar{z}_1 = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}(2\pi). \quad \left| \frac{1}{z_1} \right| = \frac{1}{|z_1|} = \frac{1}{10} ; \arg \frac{1}{z_1} = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$$

2) Soit Z le nombre complexe tel que : $z_1 Z = z_2$

$$Z = \frac{z_2}{z_1} \text{ d'où } |Z| = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 1. \arg Z = \arg \frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1(2\pi)$$

$$\arg Z = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}(2\pi) \arg Z = \frac{-11\pi}{12}(2\pi) = \frac{13\pi}{12}(2\pi).$$

$$\text{On en déduit la forme trigonométrique de } Z : Z = \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

Forme algébrique de Z :

$$Z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{-5(1+i\sqrt{3})}{5\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(-1-\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

$$Z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3) En égalisant les formes algébrique et trigonométrique de Z on a

$$Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\text{on en déduit que : } \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 5

$$1. a) -2i(1-a)^2 = (1-i)^2(1-a)^2 = [(1-i)(1-a)]^2$$

Donc les racines carrées de $-2i(1-a)^2$ sont

$$(1-a)(1-i) = 1-a-i(1-a) \text{ et } -(1-a)(1-i) = -1+a+i(1-a).$$

b) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -2i(1-a)^2$ et une racine carrée de Δ est $\delta = (1-a)(1-i) = 1-a-i(1-a)$.

Les solutions de (E) sont donc :

$$z_1 = \frac{(1+a)(1+i) - (1-a)(1-i)}{2} = \frac{2a+2i}{2} = a+i$$

$$\text{et } z_2 = \frac{(1+a)(1+i) + (1-a)(1-i)}{2} = \frac{2+2ia}{2} = 1+ia.$$

$$2. a) M \text{ est milieu de } [M_1M_2] \Leftrightarrow z_M = \frac{z_1+z_2}{2} \Leftrightarrow z_M = \frac{(1+a)}{2}(1+i).$$

$$b) z_M = \frac{(1+a)}{2}(1+i) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{(1+a)}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$$

Ainsi lorsque a varie dans \mathbb{R} , M décrit la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 6

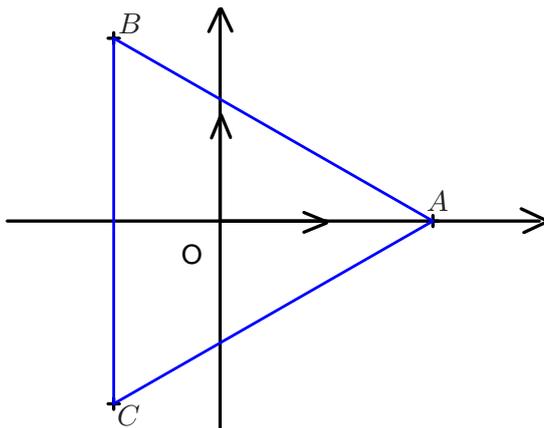
$$1. a) \text{ On a } (z+2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + 2az^2 + 2bz + 2c = az^3 + (b+2a)z^2 + (c+2b)z + 2c,$$

$$\text{d'où par identification : } \begin{cases} a = 1 \\ b+2a = 0 \\ c+2b = 0 \\ 2c = 8 \end{cases}$$

On obtient $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ d'où $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.

b) Les racines de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ sont $1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$ donc l'équation (E) a pour ensemble de solution $S = \{-2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$.

2. a)



$$\begin{aligned} b) \text{ On a : } AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{De même : } AC = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{et : } BC = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

Donc le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 7

$$1) \quad \text{le réel } x \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow x^3 - (4+i)x^2 + (7+i)x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - ix^2 + 7x + ix - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 4x^2 + 7x - 4) + i(x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \\ x(1-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = -4 \neq 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 1 - 4 + 7 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Donc le réel 1 est solution de l'équation (E) .

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } (z-1)(z-2-2i)(\alpha z + \beta) &= (z^2 - 2z - 2iz - z + 2 + 2i)(\alpha z + \beta) = [z^2 + (-3-2i)z + (2+2i)](\alpha z + \beta) \\ &= \alpha z^3 + \beta z^2 + \alpha(-3-2i)z^2 + \beta(-3-2i)z + \alpha(2+2i)z + \beta(2+2i) \\ &= \alpha z^3 + [\beta + \alpha(-3-2i)]z^2 + [\beta(-3-2i) + \alpha(2+2i)]z + \beta(2+2i) \end{aligned}$$

Ecrire que, pour tout nombre complexe z , $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(\alpha z + \beta)$

équivalent à, pour tout nombre complexe z ,

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = \alpha z^3 + [\beta + \alpha(-3-2i)]z^2 + [\beta(-3-2i) + \alpha(2+2i)]z + \beta(2+2i)$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \alpha(-3-2i) = -(4+i) \\ \beta(-3-2i) + \alpha(2+2i) = 7+i \\ \beta(2+2i) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 - i + 3 + 2i = -1 + i \\ \beta(-3-2i) = 5 - i \\ \beta(2+2i) = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 + i \\ \beta = \frac{5-i}{-3-2i} = \frac{(5-i)(-3+2i)}{9+4} = \frac{-15+10i+3i+2}{13} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i \\ \beta = \frac{-4}{2+2i} = \frac{-4}{2(1+i)} = \frac{-2(1-i)}{1+1} = -1+i \end{cases}$$

Finalement, pour tout nombre complexe z , $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)$

$$\text{b) (E) } \text{équivalent à } (z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = 0$$

L'équation (E) a donc trois solutions : le réel 1 et les complexes $2+2i$ et $1-i$



EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Partie B

$$1) \quad \frac{c}{b} = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(2-2i)}{8} = \frac{-4i}{8} = -\frac{i}{2} \quad \text{est imaginaire pur}$$

d'où \overline{OB} et \overline{OC} sont orthogonaux donc OBC est un triangle rectangle en O

$$2) \quad |b| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{donc} \quad b = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\widehat{(\overline{OA}; \overline{OB})} = \widehat{(\vec{u}; \overline{OB})} = \arg(b) = \frac{\pi}{4}$$

$$|c| = \sqrt{2} \quad \text{donc} \quad c = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\widehat{(\overline{OC}; \overline{OA})} = \widehat{(\overline{OC}; \vec{u})} \quad (2\pi) \quad \text{donc} \quad \widehat{(\overline{OC}; \overline{OA})} = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$$

$$\widehat{(\overline{OC}; \overline{OA})} = \widehat{(\overline{OA}; \overline{OB})} \quad \text{donc} \quad (OA) \text{ est la bissectrice intérieure de l'angle } \widehat{(\overline{OC}; \overline{OB})}$$

3) a. Le nombre complexe dont le module est 1 et dont un argument est $-\frac{\pi}{2}$ est $-i$

$$\text{On a donc} \quad \frac{c-d}{c} = -i \Leftrightarrow c-d = -ic \Leftrightarrow d = c+ic \Leftrightarrow d = c(1+i) \Leftrightarrow d = (1-i)(1+i)$$

donc $d = 2$.

$$b. \quad \left| \frac{c-d}{c} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{DC}{OC} = 1 \Leftrightarrow OC = CD$$

$$\arg\left(\frac{c-d}{c}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \widehat{(\overline{OC}; \overline{DC})} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad (OC) \perp (CD)$$

Puisque l'on a $(OC) \perp (CD)$ et $(OC) \perp (OB)$, on en déduit que les droites (OB) et (CD) sont parallèles.

OCDB est donc un trapèze rectangle et isocèle en C

EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 8

$$1. y \in \mathbb{R}, P(iy) = y^4 + i\sqrt{2}y^3 - 4\sqrt{2}iy - 16 = (y^4 - 16) + i(\sqrt{2}y^3 - 4\sqrt{2}y).$$

$$2. y \in \mathbb{R} \text{ et } P(iy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 16 = 0 \\ \sqrt{2}y^3 + 4\sqrt{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+2)(y^2+4) = 0 \\ y\sqrt{2}(y-2)(y+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -2 \text{ ou } y = 2.$$

Donc l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures $2i$ et $-2i$.

3. Pour tout nombre complexe z ,

$$(z^2 + 4)(az^2 + bz + c) = az^4 + bz^3 + 4az^2 + 4bz + 4c.$$

$$\text{Par identification avec } P(z), \text{ on obtient : } \begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ 4a = 4 \\ 4b = 4\sqrt{2} \\ 4c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ c = -4 \end{cases}.$$

$$4. P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - z\sqrt{2} - 4) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \text{ ou } z^2 - z\sqrt{2} - 4 = 0$$

$$\text{Or } z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i$$

Et le discriminant de l'équation du second degré $z^2 - z\sqrt{2} - 4 = 0$ est

$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(-4) = 18 = (3\sqrt{2})^2 \text{ donc les solutions de cette équation sont}$$

$$\frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Par suite l'ensemble de solution de l'équations $P(z) = 0$ est $S = \{2i, -2i, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$.

5. Soit $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, désignons par A, B, C et D les images dans le plan complexe

respectives des solutions $2i, -2i, -\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ de l'équation $P(z) = 0$.

$$\Omega A = \left| 2i - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \Omega B = \left| -2i - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Omega C = \left| -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \Omega D = \left| 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{3\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Donc les points A, B, C et D sont situés sur le cercle de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.