Calcul d' aire 2

Exercice 1 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{(x-2)^2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Déterminer les réels a, b et c pour que la courbe (C) passe par les points A(0,2), B(1,6) et C(3,8).
   b) Etudier f puis tracer (C) et ses asymptotes.
2. Pour tout réel m tel que $m > 2$, on pose A(m) l'aire en unités d'aire de la partie du plan limitée par (C) , la droite D : y = x + 1 et les droites d'équations respectives x = 3 et x = m.
   a) Vérifier que $A(m) = \left|\int_3^m \dfrac{4}{(x-2)^2}dx\right|$.
   b) Calculer A(m).
   c) Calculer les limites de A(m) à droite en 2 et en $+\infty$.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Sur quel ensemble J , f^{-1} est-elle dérivable ? Puis montrer que pour tout x de J,
   $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
3. En déduire $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan^3 x + \tan x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur [0, 2].
2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et f^{-1}.
3. a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en ua, de la partie du plan limitée par (C) et les droite d'équations respectives $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $y = 0$.
4. b) En déduire l'aire $\mathcal{A}'$, en ua , de la partie du plan limitée par (C') et les droite d'équations respectives x = 0, x = 2 et y = 0.

Calcul d' aire 2

Exercice 1 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$.

a) $A(0,2)\in(C)\Leftrightarrow f(0)=2\Leftrightarrow b+\frac{c}{4}=2\Leftrightarrow 4b+c=8$

$B(1,6)\in(C)\Leftrightarrow f(1)=6\Leftrightarrow a+b+c=6$

$C(3,8)\in(C)\Leftrightarrow f(3)=8\Leftrightarrow 3a+b+c=8$

Il en résulte que le triplet (a, b, c) est solution du système

$$\begin{cases} a\ +b+c=6 \\ 3a+b+c=8 \\ \quad 4b+c=8 \end{cases} \quad (S)$$

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} 2a\ =2 \\ 2b+2c=10 \\ 4b+c=8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b+c=5 \\ 4b+c=8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ 3b=3 \\ c=5-b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$$

b) On a pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = x+1+\frac{4}{(x-2)^2}$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote à (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{4}{(x-2)^2}=0$ donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C).

F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$,

$$f'(x)=1-\frac{8}{(x-2)^3}=\frac{(x-2)^3-8}{(x-2)^3}=\frac{(x-4)(x^2-2x+4)}{(x-2)^3}.$$

Remarquons que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$.

Il en résulte que : $f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$

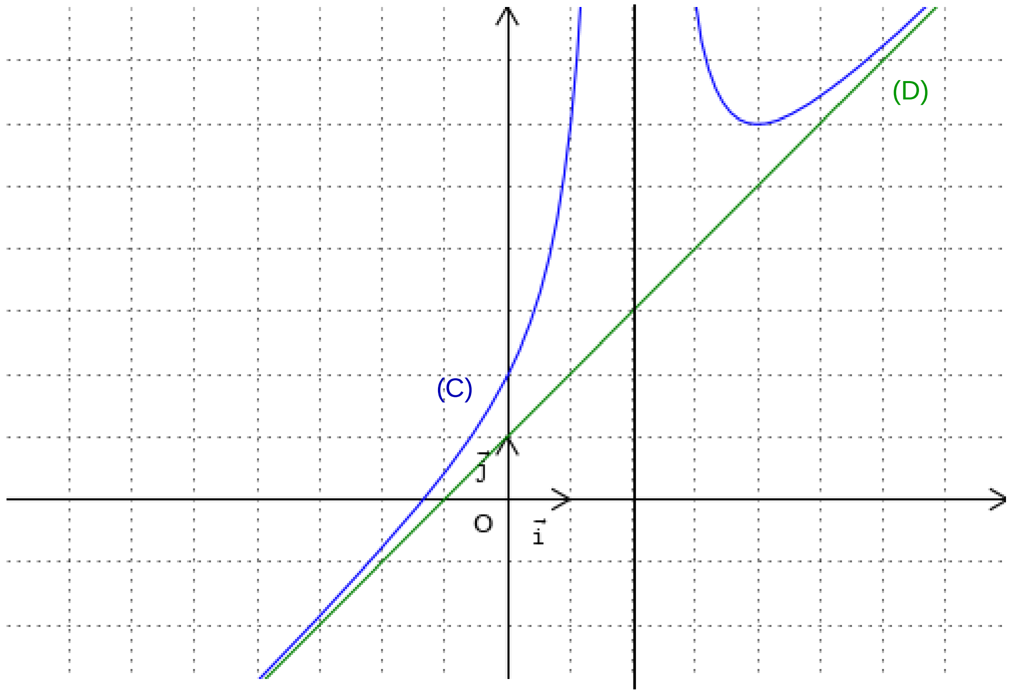
Et que $f'(x)$ est du signe de $(x-4)(x-2)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Dressons à présent le tableau de variation de f :

Calcul d' aire 2

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
f '(x)		+	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	6	↗ $+\infty$	

La courbe (C) :



2. a) Distinguons les deux cas : $m \geq 3$ et $2 < m \leq 3$.

✓ Si $m \geq 3$:
la courbe (C) est située au dessus de son asymptote D : y = x + 1 sur l'intervalle [3, m] donc A(m) l'aire en unités d'aire de la partie du plan limitée par (C) , la droite D : y = x + 1 et les droites d'équations respectives x = 3 et x = m est : $A(m) = \int_3^m \frac{4}{(x-2)^2}dx$.

✓ Si $2 < m \leq 3$:
la courbe (C) est située au dessus de (D) sur l'intervalle [m, 3] donc A(m) l'aire en unités d'aire de la partie du plan limitée par (C) , la droite D : y = x + 1 et les droites d'équations respectives x = 3 et x = m est :

$$A(m) = \int_m^3 \frac{4}{(x-2)^2}dx = -\int_3^m \frac{4}{(x-2)^2}dx .$$

Par suite, pour tout réel m > 2, $A(m) = \left|\int_3^m \frac{4}{(x-2)^2}dx\right|$.

Calcul d' aire 2

b) Pour tout réel m > 2, $A(m) = \left|\int_3^m \frac{4}{(x-2)^2}dx\right| = \left|\left[-\frac{4}{x-2}\right]_3^m\right| = \left|-\frac{4}{m-2}+4\right|$.

c) $\lim\limits_{m\to 2^+} A(m) = \left|\lim\limits_{m\to 2^+}\left(4-\frac{4}{m-2}\right)\right| = +\infty$ et $\lim\limits_{m\to +\infty} A(m) = \left|\lim\limits_{m\to +\infty}\left(4-\frac{4}{m-2}\right)\right| = 4$.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. f est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \geq 0$ et $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{2}\leq x<\pi\\ \cos x = 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

Donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

Ainsi , f réalise une bijection $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur l'intervalle $I = f\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)\right[= [1,+\infty[$

2. On a f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et $f'(x)\neq 0$ pour tout x de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ donc f^{-1}, la fonction

réciproque de f, est dérivable sur J = $I = f\left(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right) =]1,+\infty[$.

$$\begin{cases} x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\\ f(x)=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in]1,+\infty[\\ f^{-1}(y)=x\end{cases}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

Or $y = f(x) = \frac{1}{\sin x}$ donc $\sin x = \frac{1}{y}$

Et comme $\cos x<0$ et $\sin x>0$ alors $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2} = -\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$.

Par conséquent, $\left(f^{-1}\right)'(y) = -\frac{\frac{1}{y^2}}{-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}} = \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}$.

Calcul d' aire 2

Ainsi, pour tout x de J = $]1,+\infty[$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

3. $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\left(f^{-1}\right)'(t)\,dt=f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)-f^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Il faut à présent calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$:

Cherchons un réel x dans $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ tel que $f(x)=\sqrt{2}$: $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et par suite $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Cherchons un réel x dans $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ tel que $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$: $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et par suite $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

4. Par suite : $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan^3 x+\tan x$.

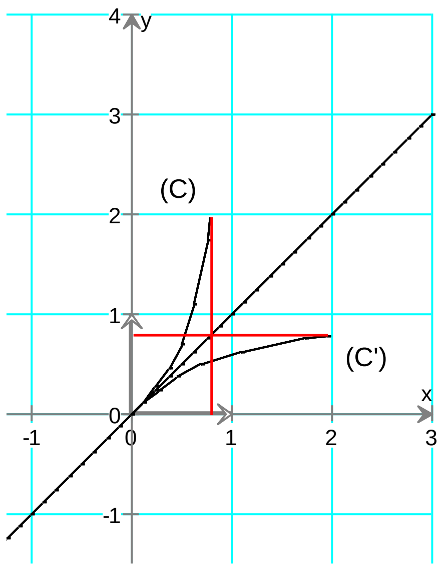
1. f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$,

$f'(x)=3\left(1+\tan^2 x\right)\tan^2 x+\left(1+\tan^2 x\right)>0$

Donc f est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Il en résulte que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=[0,2]$.



2. Les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

2. a) L'aire $\mathcal{A}$, en ua, de la partie du plan limitée par (C) et les droite d'équations respectives x = 0, $x=\dfrac{\pi}{4}$ et y = 0 est donnée par :

$$\mathcal{A}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)\tan x\,dx=\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

Calcul d' aire 2

b) Le symétrique de la partie du plan limitée par (C) et les droite d'équations respectives $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = 0$ par rapport à la première bissectrice est la partie du plan limitée par (C') et les droite d'équations respectives $x = 0$, $x = 2$ et $y = \frac{\pi}{4}$.

IL en résulte que l'aire $\mathcal{A}'$, en ua, de la partie du plan limitée par (C) et les droite d'équations respectives $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$ est égale à l'aire du rectangle de longueur 2 et de hauteur $\frac{\pi}{4}$ moins $\mathcal{A}$, d'où :

$$\mathcal{A}' = 2\frac{\pi}{4} - \mathcal{A} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$