Egalité de BEZOUT

Exercice 1

On considère l'équation (E) : $13x-49y=11$

1) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $13u+49v=1$

2) Donner alors une solution particulière de (E).

3) Quel est l'ensemble des solutions de (E)?

Exercice 2

Pour la proposition suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.
Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition:
L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x;y) solutions de l'équation $12x-5y=3$ est l'ensemble des couples $(4+10k;9+24k)$ où $k\in Z$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des couples (x;y) dans Z vérifiant les équations suivantes

a) $5x+12y=20$ b) $6x+8y=7$ c) $6x+8y=10$

Exercice 4

Une seule des quatre réponses proposées est exacte.
On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x+34y=2$,
où x et y sont des entiers relatifs.

A: Les solutions de (E) sont toutes de la forme $(x;y)=(34k-4\ ;\ 5-24k),\ k\in Z$

B: L'équation (E) n'a aucune solution

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme $(x;y)=(17k-7\ ;\ 5-12k),\ k\in Z$

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme $(x;y)=(-7k\ ;\ 5k),\ k\in Z$

Exercice 5

1) Démontrer qu'il existe au moins deux entiers relatifs u et v tels que $13u-23v=1$

Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux de ces entiers.

2) Résoudre dans ZxZ l'équation $-156x+276y=24$

Egalité de BEZOUT

Solutions

Solution 1

On considère l'équation (E) : $13x-49y=11$

1) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $13u+49v=1$

Posons $a=13$ et $b=49$

a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout

l'équation $13u+49v=1$ admet des solutions.

Formons l'algorithme d'Euclide montrant que 49 et 13 sont premiers entre eux

et ecrivons successivement chacun des restes en fonction des seules valeurs a et b.

$$\begin{cases} 49=13x3+10 \\ 13=1x10+3 \\ 10=3x3+1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 10=49-3x3 \\ 3=13-10 \\ 1=10-3x3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 10=b-3a \\ 3=a-(b-3a)=4a-b \\ 1=(b-3a)-3(4a-b)=-15a+4b \end{cases}$$

On obtient donc $-15a+4b=1$ ou $-15x13+4x49=1$

L'équation $13u+49v=1$ admet donc la solution $u=-15$ et $v=4$

2) Donner alors une solution particulière de (E) avec (E) : $13x-49y=11$

Puisque $-15x13+4x49=1$, multiplions chacun des deux membres de cette égalité par 11 $-165x13+44x49=11$ ou encore $-(165)x13-(-44)x49=11$

et donc une solution particulière de (E) est $(x_0,y_0)=(-165,-44)$

3) Quel est l'ensemble des solutions de (E) avec (E) : $13x-49y=11$

On a donc (E) : $13x-49y=11$ et (E_0) : $(-165)x13-(-44)x49=11$

Formons la différence $(E)-(E_0)$: $13(x+165)=49(y+44)$

13 divise $13(x+165)$ donc 13 divise aussi $49(y+44)$ et 13 est premier avec 49

D'après le théorème de Gauus 13 divise $(y+44)$

il existe donc $k\in Z$ tel que $y+44=13k$ ou $y=-44+13k$

Reportons $y+44=13k$ dans l'équation $(E)-(E_0)$ on obtient $13(x+165)=49x13k$

soit en divisant les deux membres de cette équation par 13

$$x+165=49k \text{ ou } x=-165+49k$$

Réciproquement, on vérifie que pour tout entier relatif k,
$(-165+49k,-44+13k)$ est bien solution de (E)

L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{-165+49k),(-44+13k);k\in Z\}$

Egalité de BEZOUT

Solutions

Remarque :

on peut par exemple trouver comme solution particulière de (E) $(x_0, y_0) = (31, 8)$

L'ensemble des solutions est alors $S = \{(31+49K),(8+13K); K \in Z\}$

qui est le même ensemble des solutions. On a posé $k = K + 4$.

L'ensemble dessolutions est unique mais il peut s'écrire d'une infinité de façons.

Solution 2

On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$

1) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $12u + 5v = 3$

Posons $a = 12$ et $b = 5$

a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout

l'équation $12u + 5v = 1$ admet des solutions.

Formons l'algorithme d'Euclide montrant que 12 et 5 sont premiers entre eux

et ecrivons successivement chacun des restes en fonction des seules valeurs a et b.

$$\begin{cases} 12 = 2x5 + 2 \\ 5 = 2x2 + 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 = 12 - 2x5 \\ 1 = 5 - 2x2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 = a - 2b \\ 1 = b - 2(a-2b) = -2a + 5b \end{cases}$$

On obtient donc $-2a + 5b = 1$ ou $-2x12 + 5x5 = 1$

Multiplions chacun des deux membres de cette égalité par 3

$-6x12 + 15x5 = 3$ ou $(-6)x12 - (-15)x5 = 3$

Une solution particulière de (E) est $(x_0, y_0) = (-6, -15)$

On a donc (E) : $12x - 5y = 3$ et (E_0) : $(-6)x12 - (-15)x5 = 3$

Formons la différence $(E) - (E_0)$: $12(x+6) = 5(y+15)$

12 divise $12(x+6)$ donc 12 divise aussi $5(y+15)$ et 12 est premier avec 5

D'après le théorème de Gauus 12 divise $(y+15)$

il existe donc $k \in Z$ tel que $y + 15 = 12k$ ou $y = -15 + 12k$

Reportons $y + 15 = 12k$ dans l'équation $(E) - (E_0)$:on obtient $12(x+6) = 5x12k$

soit en divisant les deux membres de cette équation par 12

$x + 6 = 5k$ ou $x = -6 + 5k$

Réciproquement, on vérifie que pour tout entier relatif k,

$(-6 + 5k, -15 + 12k)$ est bien solution de (E)

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{-6 + 5k), (-15 + 12k); k \in Z\}$

Egalité de BEZOUT

Solutions

En posant $k = K+2$, l'ensemble des solutions s'écrit aussi

$S = \{(4+5K),(9+12K);K \in Z\}$

Pour $K=1$, on a donc en particulier $(x,y) = (9,21)$ est solution

L'ensemble des couples $(4+10k;9+24k)$ où $k \in Z$ ne permet pas d'obtenir le couple $(9,21)$.

L'ensemble $\{(4+10k;9+24k);\ k \in Z\}$ ne contient que des solutions de (E) mais ne contient pas toutes les solutions de (E)

La proposition est donc fauuse.

Solution 3

a) $5x+12y=20$

5 et 12 sont premiers entre eux et $(x_0,y_0)=(4,0)$ est solution particulière

(E) : $5x+12y=20$

(E_0) ; $5(4)+12(0)=20$

par différence membre à membre des deux équations

$(E)-(E_0)$: $5(x-4)=-12y$

L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{(4+12k),(-5k)\ ;\ k \in Z\}$

b) $6x+8y=7$

6 et 8 ne sont pas premiers entre eux, $d = PGCD\ (6,8)=2$

Divisons par 2 les deux membres de l'équation, il reste $3x+4y=\frac{7}{2}$

Puisque $\frac{7}{2} \notin Z$, l'équation $6x+8y=7$ n'admet aucune solution dans ZxZ

c) $6x+8y=10$

Puisque $PGCD(6;8)=2$, divisons par 2 les deux membres de l'équation,

il reste (E) $3x+4y=5$

Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, l'équation (E) admet des solutions

$(x_0,y_0)=(-1,2)$ est solution particulière

(E) $3x+4y=5$

(E_0) $3(-1)+4(2)=5$

par différence membre à membre $3(x+1)=4(y-2)$

L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{(-1+4k),(2+3k);\ k \in Z\}$

Egalité de BEZOUT

Solutions

Solution 5

On considère l'équation : $13u-23v=1$

1) Posons $a=13$ et $b=23$

a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout

l'équation $13u-23v=1$ admet des solutions.

Formons l'algorithme d'Euclide montrant que 13 et 23 sont premiers entre eux

et ecrivons successivement chacun des restes en fonction des seules valeurs a et b.

$$\begin{cases} 23=13x1+10 \\ 13=10x1+3 \\ 10=3x3+1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 10=23-13 \\ 3=13-10 \\ 1=10-3x3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 10=b-a \\ 3=a-(b-a)=2a-b \\ 1=(b-a)-3(2a-b)=-7a+4b \end{cases}$$

On obtient donc $-7a+4b=1$ ou $-7x13+4x23=1$

L'équation $13u-23v=1$ admet donc la solution $u=-7$ et $v=-4$

2) Résoudre dans Z^2 l'équation $-156x+276y=24$

En divisant les deux membres de l'équation par 12, on obtient

$(E)\quad -13x+23y=2$

Puisque $-7x13+4x23=1$, multiplions chacun des deux membres de cette

égalité par 2 $\quad -14x13+8x23=2$

ou encore $\quad (E_0)\quad -(14)x13+(8)x23=2$

et donc une solution particulière de (E) est $(x_0,y_0)=(14,8)$

Formons la différence $(E)-(E_0)$ $\quad (E)-(E_0)$: $13(x-14)=23(y-8)$

13 divise $13(x-14)$ donc 13 divise aussi $23(y-8)$ et 13 est premier avec 23

D'après le théorème de Gauus 13 divise $(y-8)$

il existe donc $k\in Z$ tel que $y-8=13k$ ou $y=8+13k$

Reportons $y-8=13k$ dans l'équation $(E)-(E_0)$

on obtient $13(x-14)=23x13k$

soit en divisant les deux membres de cette équation par 13

$x-14=23k$ ou $x=14+23k$

Réciproquement, on vérifie que pour tout entier relatif k,

$(14+23k,8+13k)$ est bien solution de (E)

L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{14+23k),(8+13k);k\in Z\}$