Limites et Asymptotes

Exercice 1

Déterminer les **limites à gauche et à droite** de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x^2-9)}$ aux points –3, 3 et 0. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 2

Soit $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{4}{x-1}$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition .
2. Montrer que (C) admet une **asymptote oblique (D)** et étudier les positions relatives de (C) et (D).

Exercice 3

Rechercher les **asymptotes parallèles aux axes** que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $g : x \mapsto 9 + \dfrac{3}{x-2}$

b) $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - 3$.

Exercice 4

Montrer que les courbes représentatives (C_1), (C_2) et (C_3) respectivement des fonctions suivantes admettent une même **asymptote verticale**.

$f_1(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; $f_2(x) = \dfrac{x+3}{3x^2+x-2}$; $f_3(x) = \dfrac{1}{\sin(\pi x)}$, $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$.

Exercice 5

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+3} - (x+2)$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3} - (2x+1)$

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1] \cup [4,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + \dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x - \dfrac{3}{2}$.
3) En déduire que la courbe (C) représentative de f admet une asymptote oblique (D) et (D’) que l’on précisera.

Limites et Asymptotes

Exercice 1

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2-9}=-\frac{1}{9}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2(x^2-9)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2-9}=-\infty$.

D'où la droite des ordonnées est asymptote à la courbe représentative (C) de f.

Dressons le tableau de signe de $x^2-9=(x-3)(x+3)$:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		+	0	-	0	+	

Remarquons que :

$\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-9)=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 3^+}x^2(x^2-9)=0^+$ par conséquent $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x^2(x^2-9)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-9)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 3^-}x^2(x^2-9)=0^-$ par conséquent $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{x^2(x^2-9)}=-\infty$

D'où la droite d'équation x = 3 est asymptote à la courbe représentative (C) de f.

Exercice 2

Soit $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{x-1}$.

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

   On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to 1} 2x-3=-1$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0^+$ alors $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

et comme $\lim\limits_{x\to 1^-} x-1=0^-$ alors $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-3)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$

   Donc la droite (D) d'équation y = 2x – 3 est asymptote à (C).

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 9+\frac{3}{x-2}=9$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 9+\frac{3}{x-2}=9$

Donc la droite $D: y=9$ est asymptote à (C_g).

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 9+\frac{3}{x-2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 9+\frac{3}{x-2}=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-3=-3$ donc la droite D : y = -3 est asymptote à (C_h) au voisinage de + ∞.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=+\infty$ donc la droite $(O,\vec{j})$ est asymptote à (C_h).

Limites et Asymptotes

Exercice 4

- $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_1(x) = +\infty$ donc la droite $\Delta : x = 1$ est asymptote à (C_1).

$\lim\limits_{x\to -1^+} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_1(x) = -\infty$ donc la droite $\Delta : x = 1$ est asymptote à (C_1).

- $f_2(x) = \dfrac{x+3}{3x^2+x-2}$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f_1(x) = +\infty$ donc la droite $\Delta : x = -1$ est asymptote à (C_2).
$\lim\limits_{x\to 2^+} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f_1(x) = -\infty$ donc la droite $\Delta' : x = 2$ est asymptote à (C_2).

- $f_3(x) = \dfrac{1}{\sin(\pi x)}$

Si $\dfrac{1}{2} \le x < 1$ alors $\dfrac{\pi}{2} \le \pi x < \pi$ par suite $\sin(\pi x) > 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x) = -\infty$.
Si $1 < x \le \dfrac{3}{2}$ alors $\pi < \pi x \le \dfrac{3\pi}{2}$ par suite $\sin(\pi x) < 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_1(x) = +\infty$
Ainsi la droite $\Delta : x = 1$ est asymptote à (C_3).

Conclusion : toutes les courbes (C_1), (C_2) et (C_3) admettent la droite $\Delta : x = 1$ comme asymptote.

Exercice 5

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+4x+3} - (x+2) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+4x+3-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)} = 0$

3)
$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+4x+3} - (2x+1) = \lim_{x\to +\infty} x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - x\left(2+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x\left[\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - \left(2+\frac{1}{x}\right)\right] = -\infty$$

Limites et Asymptotes

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$.

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2-3x-4=\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x+\frac{3}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x-4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{x^2-3x-4}+\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7}{4}}{x\left[\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+\left(1-\frac{3}{2x}\right)\right]}=0$$

Donc la droite D: $y=x-\frac{3}{2}$ est asymptote à (C) au voisnage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x-\frac{3}{2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x-4}+\left(x-\frac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{x^2-3x-4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{7}{4}}{-x\left[\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+\left(1-\frac{3}{2x}\right)\right]}=0$$

Donc la droite D′: $y=-x+\frac{3}{2}$ est asymptote à (C) au voisnage de $-\infty$.