Série 1: calcul intégral

Exercice 1 :

Calculer les intégrales $A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 t\cos^3 t\,dt$ et $B=\int_{-1}^{2}\left(1-|x-1|\right)^n dx$.

Exercice 2 :

1. Exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$ puis $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$.
2. En déduire la primitive F de f : $x\mapsto\sin^4 x$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=-\dfrac{8x^2+32x+2}{\left(4x^2-1\right)^2}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que pour tout x de $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$,

$$f(x)=\frac{a}{(2x+1)^2}+\frac{b}{(2x-1)^2}.$$

2. En déduire $\int_1^2 f(t)\,dt$.

Exercice 4

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\pi} x.\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx$$

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$.

1. Calculer I_n en fonction de n.
2. Montrer que (I_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme I_0.
3. On pose , pour tout entier naturel n, $S_n=I_0+I_1+...+I_n$.
   Calculer S_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Série 1: calcul intégral

Exercice 6 :

E désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} E\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}$.

2. a) Calculer $I = \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt$.

   b) Etant donné un entier n, exprimer $\int_0^{n\pi} \sin^2 t \, dt$ en fonction de n.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{x} \sin^2 t \, dt$.

Exercice 7:

Pour tout entier n, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

1. En intégrant par parties, montrer que , pour tout entier n : $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t . \sin^n t \, dt$.
2. En déduire la relation de récurrence : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Calculer I_0 et I_1.
4. En déduire I_2 et I_3.

Série 1: calcul intégral

Exercice 1 :

- On sait que pour tout x réel, $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

donc $\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ d'où $\sin^3 x.\cos^3 x = \frac{1}{8}\sin^3 2x$.

Linéarisons à présent $\sin^3 2x$:

$$\sin^3(2x) = \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right) = \frac{-1}{8i}\left(2i\sin 6x - 6i\sin 2x\right)$$

Il en résulte : $\sin^3(2x) = \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x) = \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 6x$

et par suite $\sin^3 x.\cos^3 x = \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 6x$.

Par conséquent, $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 t\cos^3 t\,dt = \frac{3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\,dx - \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 6x\,dx$

$$= \frac{1}{192}\left[-\cos 6x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{3}{64}\left[-\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{384}.$$

- On sait que $|1-x| = 1-x$, si $x \le 1$ et $|1-x| = x-1$, si $x \ge 1$.

  Donc $\left(1-|1-x|\right)^n = x^n$, si $x \le 1$ et $\left(1-|1-x|\right)^n = (2-x)^n$, si $x \ge 1$.

  Ainsi, $B = \int_{-1}^{2}\left(1-|x-1|\right)^n dx = \int_{-1}^{1} x^n dx + \int_1^2 (2-x)^n dx$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{(2-x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2+(-1)^n}{n+1}$$

Exercice 2 :

1. D'une part, on sait que pour tout x réel, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

   donc $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$.

   Et d'autre part, on sait que pour tout x réel, $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$, il vient :

   $$\sin^4 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

2. Pour tout x réel, F(x) $= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Série 1: calcul intégral

Comme F(0) = 0 alors c = 0 et donc $F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx = \left[= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{3\pi}{64} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}.$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x) = -\frac{8x^2+32x+2}{(4x^2-1)^2}$.

1. Pour tout x de $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x^2-32x-2}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(a+b)x^2 - 4(a-b)x + (a+b)}{(4x^2+1)^2}$$

D'où $\begin{cases} 4(a+b) = -8 \\ -4(a-b) = -32 \\ a+b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=6 \\ 2b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}$

2. Ainsi $\int_1^2 f(t)dt = 3\int_1^2 \frac{dt}{(2t+1)^2} - 5\int_1^2 \frac{dt}{(2t-1)^2} = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2t+1}\right]_1^2 + \frac{5}{2}\left[\frac{1}{2t-1}\right]_1^2 = -\frac{22}{15}$.

Exercice 4 :

➢ On pose :

u(x)= x u'(x)= 1

v(x)= $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ v(x)= $-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

On obtient :

$$I = \int_0^{\pi} x.\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \left[-2x.\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 4.$$

➢ On pose :

u(x)= x u'(x)= 1

v(x)= $\sqrt{3-x}$ v(t)= $-\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x}$

On obtient :

$$J = \int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx = -\frac{2}{3}\left[x(3-x)\sqrt{3-x}\right]_0^2 + \frac{2}{3}\int_0^2 (3-x)\sqrt{3-x}\,dx = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\int_0^2 (3-x)\sqrt{3-x}\,dx$$

Série 1: calcul intégral

$$=-\frac{4}{3}+2\int_0^2\sqrt{3-x}\,dx-\frac{2}{3}\int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx=-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left[(3-x)\sqrt{3-x}\right]_0^2-\frac{2}{3}J=-\frac{8}{3}+4\sqrt{3}-\frac{2}{3}J$$

Il en résulte que : $\frac{5}{3}J=-\frac{8}{3}+4\sqrt{3}\Leftrightarrow J=\frac{12}{5}\sqrt{3}-\frac{8}{5}$

Exercice 5 :

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\int_\pi^{4n\pi}x\cos\frac{x}{2}\,dx$.

1. On pose :

$u(x)=x$ $\qquad$ $u'(x)=1$

$v(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $v(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

On obtient :

$$I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\left[2x.\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi-2\int_0^\pi\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\left[2x.\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_\pi^{4n\pi}+4\left[\cos\frac{x}{2}\right]_\pi^{4n\pi}\right).$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}(4-2\pi)$$

$$=\frac{1}{2^n}(2-\pi)$$

2. Pour tout entier n, $I_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}(2-\pi)=\frac{1}{2}(2-\pi)\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}I_n$.

Donc (I_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $I_0=2-\pi$.

3. Pour tout entier naturel n, $S_n=I_0+I_1+...+I_n=I_0\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2(2-\pi)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

Comme $\frac{1}{2}\in]-1,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=2(2-\pi)$.

Série 1: calcul intégral

Exercice 6:

1. Par définition de la partie entière et pour tout x réel,

$$E\left(\frac{x}{\pi}\right)\le\frac{x}{\pi}<E\left(\frac{x}{\pi}\right)+1 \quad \text{donc} \quad E\left(\frac{x}{\pi}\right)-1\le\frac{x}{\pi}-1<E\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

D'où $\frac{x}{\pi}-1<E\left(\frac{x}{\pi}\right)\le\frac{x}{\pi}$.

Pour tout x > 0, $\frac{x}{\pi}-1<E\left(\frac{x}{\pi}\right)\le\frac{x}{\pi}\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}-\frac{1}{x}<\frac{1}{x}E\left(\frac{x}{\pi}\right)\le\frac{1}{\pi}$.

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\pi}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}E\left(\frac{x}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}$.

2. a) $I=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$.

b) $\int_0^{n\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 t\,dt+\ldots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\sin^2 t\,dt$

Or la fonction $t\mapsto\sin^2 t$ est périodique de période π

donc $\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\ldots=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\sin^2 t\,dt=I$ d'où $\int_0^{n\pi}\sin^2 t\,dt=nI=\frac{n\pi}{2}$.

3. Pour tout x > 0, $E\left(\frac{x}{\pi}\right)\le\frac{x}{\pi}<E\left(\frac{x}{\pi}\right)+1\Leftrightarrow\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)\le x<\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)+\pi$

Donc $\int_0^{x}\sin^2 t\,dt==\int_0^{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}\sin^2 t\,dt+\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt=E\left(\frac{x}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}+\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt$.

De plus , pour tout x > 0, et pour tout t de $[0,x]$, $0\le\sin^2 t\le 1$ donc

$$0\le\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt\le\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}dt\Leftrightarrow 0\le\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt\le x-\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

d'où $0\le\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt\le\pi\Leftrightarrow 0\le\frac{1}{x}\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt\le\frac{\pi}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{x}=0$, il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt=0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\sin^2 t\,dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}E\left(\frac{x}{\pi}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\int_{\pi E\left(\frac{x}{\pi}\right)}^{x}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{\pi}.\frac{\pi}{2}+0=\frac{1}{2}$.

Série 1: calcul intégral

Exercice 7 :

1. Soit n un entier naturel, $I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t.\sin^{n+1}t\,dt$

   On pose :

   u(t)= $\sin^{n+1}t$ u'(t)= $(n+1)\cos t.\sin^n t$

   v(t)= $\sin t$ v(t)= $-\cos t$

   On obtient :

   $$I_{n+2}=\left[-\cos t.\sin^{n+1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos^2 t.\sin^{n+1}t\,dt=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\sin^n t\,dt\,.$$

2. Pour tout réel t, $\cos^2 t=1-\sin^2 t$ donc :

   $$\begin{aligned}I_{n+2}&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\sin^n t\,dt\\&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\sin^n t\,dt\\&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt\\&=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}\end{aligned}$$

   D'où $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n\Leftrightarrow I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

3. On a : $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\dfrac{\pi}{2}$ et $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

4. On en déduit que : $I_2=\dfrac{1}{2}I_0=\dfrac{\pi}{4}$ et $I_3=\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{2}{3}$.