

Applications des formules d'Euler : méthode de l'arc moitié

Pré requis : pour tout réel θ , $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Astuces pour tout réel θ , $\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = e^{i\theta}$ et $e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot e^{-i\frac{\theta}{2}} = 1$.

Proposition :

Pour tout réel θ , $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Preuve :

Pour tout réel θ , on a :

$$e^{i\theta} + 1 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 + e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{et } e^{i\theta} - 1 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 - e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Pour s'exercer :

1. A l'aide des formules d'Euler, exprimer $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.

2. Vérifier que : $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$.

Solution :

$$1. \text{ On a : } \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}}{2i}.$$

$$\begin{aligned} 2. e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= \left(e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}\right) - \left(e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{-\alpha + \beta}{2}\right)}\right) = e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{-\alpha + \beta}{2}\right)}\right) \\ &= e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$