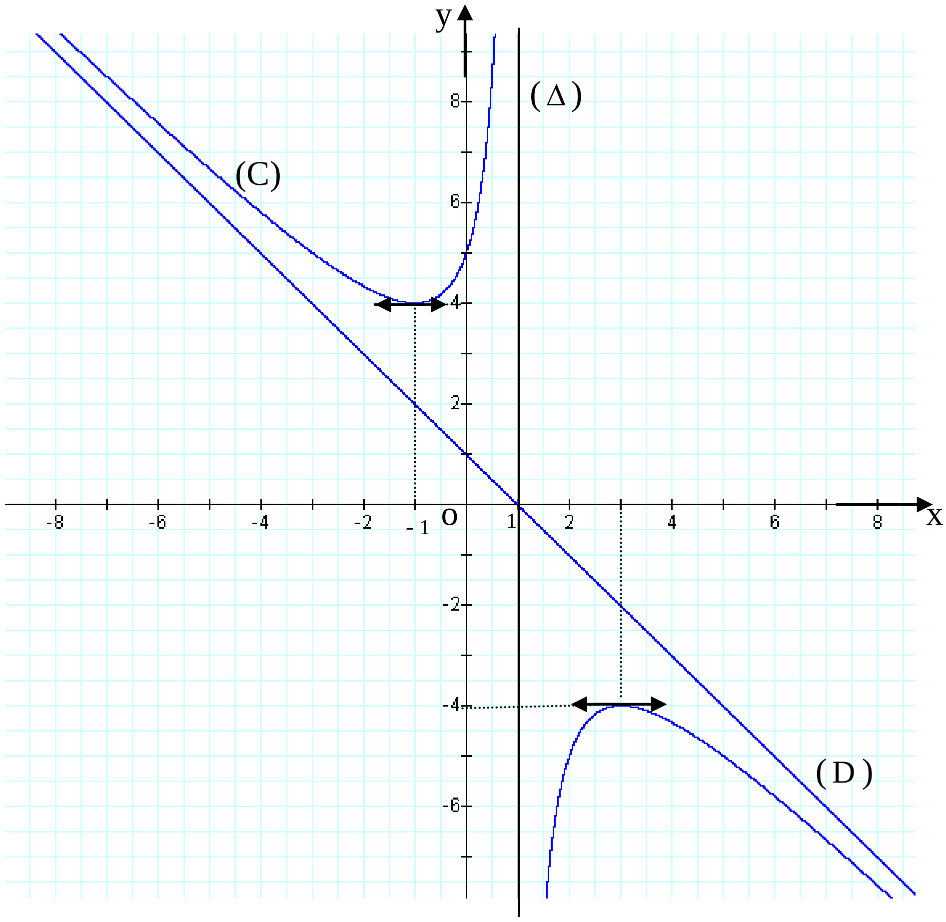
Série 2 : fonction réciproque

Exercice 1:

La courbe (C) ci-dessous est représentative d'une fonction f.
Les deux droites (D) et (Δ) sont les asymptotes de (C).



I-Utiliser le graphique pour:

1- a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Trouver $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ et écrire une équation de la droite (Δ).

2- a) Trouver f(0) et f(3).

b) Trouver $f'(-1)$ et $f'(3)$.

3- Résoudre chacune des inéquations suivantes :

a) f(x) >0

b) f(x) $\leq$ 1

c) $f'(x) > 0$.

4- Ecrire une équation de la droite (D).

5- Dresser le tableau de variations de f.

6- La fonction f est donnée par $f(x) = ax + 1 + \dfrac{b}{x-c}$.

Montrer que a = -1, b = -4 et c =1.

Série 2 : fonction réciproque

II- Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,-1]$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Tracer (C') la courbe représentative de g^{-1} la fonction réciproque de g .
3. Sur quel ensemble g^{-1} est –elle dérivable ?
4. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

<u>Exercice 2</u>

Le tableau suivant est le tableau de variations d'une fonction f .

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Donner les équations des asymptotes de (C).
3) Quel est le nombre de solutions de l'équation f(x) = 3 ?
4) Résoudre l'inéquation f(x) < 0.
5) Comparer, en justifiant, f(2) et f(3).
6) Ecrire une équation de la tangente à (C) au point A(0 ;-1).
7) Tracer la courbe (C).

Partie B

Dans cette partie on prend $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+b}$.

1) Déterminer, en utilisant le tableau de variations de f, les valeurs de a et de b .
2) Résoudre l'équation f(x) = 3.
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Série 2 : fonction réciproque

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1. Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

2. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

 b) Montrer que pour x de I, $f^{-1}(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Montrer que pour tout x de J, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 - \dfrac{3}{4}}$.

3. On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(x) = f^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\dfrac{2}{\pi}x\right)}\right)$.

 a) Montrer que pour tout x de $[0,1[$, $g(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

 b) Montrer que g réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

 c) Expliciter $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout x de K.

Série 2 : fonction réciproque

Exercice 1

I.

1. a) L'ensemble de définition de est $\mathbb{R}$ -{1}.
   b) $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$,
   la droite (Δ) a pour équation :x =1
2. a) f(0)= 5 et f(3)=-4
   b) $f'(1) = 0$ et $f'(3) = 0$
3. a) f(x)>0 lorsque (C) est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $x \in]-\infty;1[$
   b) f(x) $\leq$ 1 donc (C) doit être au-dessous de la droite d'équation y=1,
   par conséquent $x \in]1;+\infty[$
   c) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1;1[\cup]1;3[$.
4. (D) passe par les points (0;1) et (1;0) donc son coefficient directeur est : $\frac{0-1}{1-0} = -1$
   et son ordonnée à l'origine est 1 par suite (D) est d'équation y = - x + 1.
5. Le tableau de variations de f est

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
f(x)	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

6. La droite d'équation x=1 est une asymptote verticale donc c =1.
   f(0) = 5 donc b = – 4.
   f(3) = – 4, par suite a = – 1

II.

Pour tout x de $]-\infty,-1]$, $g(x) = -x+1-\frac{4}{x-1}$.

1. g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ donc g réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ sur J = $g(]-\infty,-1]) = [4,+\infty[$.
2. (C') la courbe représentative de g^{-1} est le symétrique de la courbe (C_g) de g par rapport à la droite D' : y = x.

Comme D : y = -x +1 est asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$ et D est perpendiculaire à la droite D' : y = x alors D est asymptote à (C') au voisinage de $+\infty$.
Voir courbe ci-dessous.

3. g est dérivable sur $]-\infty,-1]$ et g'(x) $\neq 0$ pour tout x de $]-\infty,-1[$ donc g^{-1} est dérivable sur $g(]-\infty,-1[) =]4,+\infty[$.

Série 2 : fonction réciproque

4. On a : $\begin{cases} x \leq -1 \\ g(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4 \\ g^{-1}(y) = x \end{cases}$

$$g(x) = y \Leftrightarrow -x+1-\frac{4}{x-1} = y \Leftrightarrow (-x+1)(x-1)-4 = y(x-1) \Leftrightarrow -x^2+2x-5 = yx-y$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-2)x+5-y = 0 \qquad (E)$$

Le discriminant de l'équation (E) est : $(y-2)^2-4(5-y) = y^2-16 \geq 0$

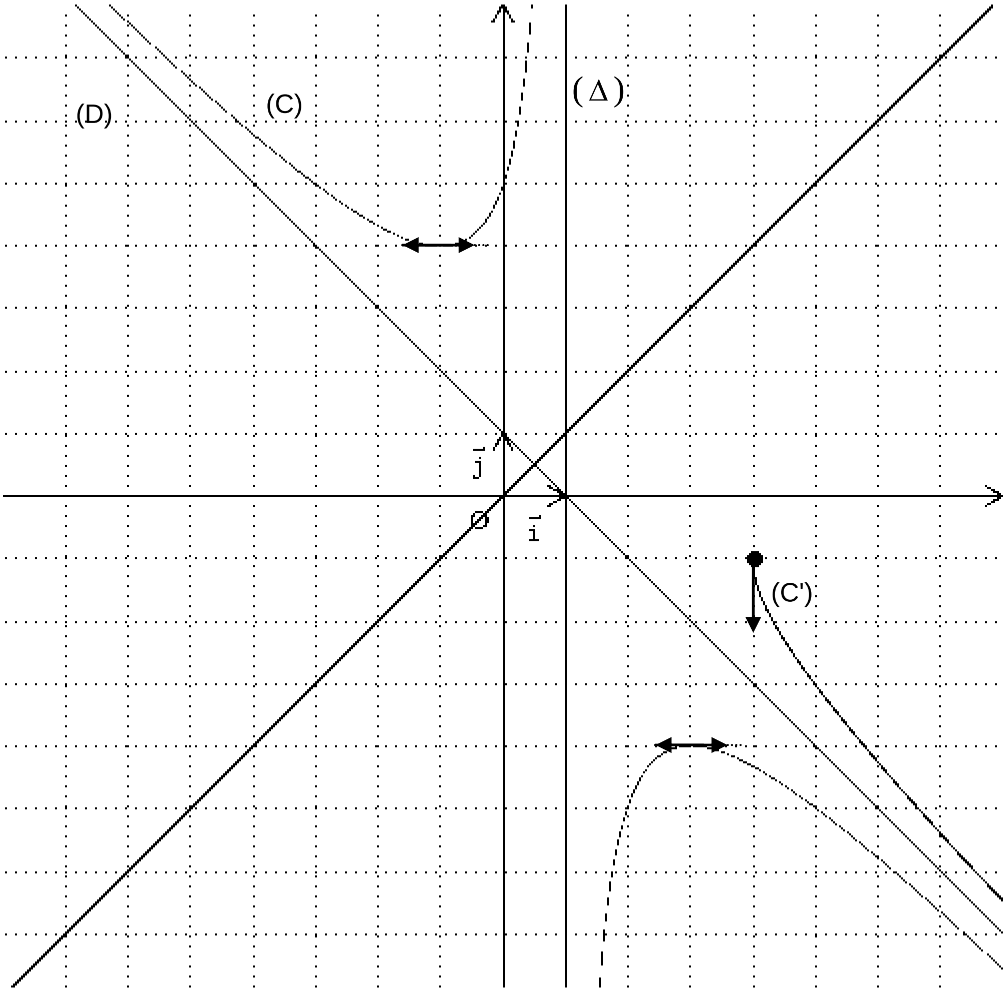
Les solutions de l'équation (E) sont donc :

$$x' = \frac{-(y-2)-\sqrt{y^2-16}}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-(y-2)+\sqrt{y^2-16}}{2}.$$

Une et une seule valeur parmi x' et x'' est dans l'intervalle $]-\infty,-1]$, comparons pour cela x' et x'' : $x'-x'' = -\sqrt{y^2-16} \leq 0$. Il en résulte que : $x' \leq -1 \leq x''$.

D'où $x = x' \Leftrightarrow x = \dfrac{-(y-2)-\sqrt{y^2-16}}{2} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \dfrac{2-y-\sqrt{y^2-16}}{2}$.

Il en résulte que , pour tout x de $[4,+\infty[$, $g^{-1}(x) = \dfrac{2-x-\sqrt{x^2-16}}{2}$.

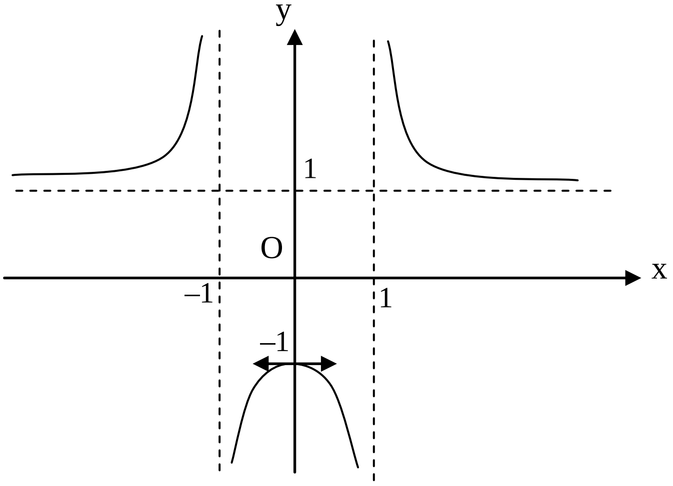


Série 2 : fonction réciproque

Exercice 2

Partie A

1. Le domaine de définition de f est : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$
2. Les équations des asymptotes de (C) sont : $x = -1$, $x = 1$ et $y = 1$.
3. L'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions α et β telles que $\alpha < -1$ et $\beta > 1$.
4. $f(x) < 0$ pour tout x de $]-1,1[$ donc l'ensemble de solutions de $f(x) < 0$ est $]-1,1[$.
5. f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$ donc $f(2) > f(3)$.
6. Une équation de la tangente au point A(0, -1) est $y = -1$.
7.



Partie B

1. $f(0) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} = -1 \Leftrightarrow b = -1$

Remarque : $x = 1$ et $x = -1$ sont les équations des asymptotes, donc $b = -1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} a = a \quad \text{or} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ donc } a = 1.$$

2. $f(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

3. On a pour tout $x > 1$, $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

   a) g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $J = g\left(]1,+\infty[\right) =]1,+\infty[$.

   b) On a : $\begin{cases} x > 1 \\ g(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 4 \\ g^{-1}(y) = x \end{cases}$

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} = y \Leftrightarrow x^2+1 = y\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow (y-1)x^2 = y+1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \quad \text{or } x > 1 \text{ donc } x = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}}.$$

Ainsi, pour tout $x > 1$, $g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Série 2 : fonction réciproque

Exercice 3

1. Pour tout x réel, $$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)\frac{(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}$$
$$=\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$$
$$=\frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$$

2. a) La fonction f étant continue et strictement croissant sur $\mathbb{R}$, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I=f(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=1$$

et $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-1$$

Il en résulte que I = $]-1,1[$

b) Pour montrer que pour tout x de $]-1,1[$, $f^{-1}(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, i ; suffit de montrer que pour tout x de $]-1,1[$, $f\left[-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=x$.

On a pour tout x de $]-1,1[$, $$f\left[-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\frac{-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1}{\sqrt{\left(-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+2\left(-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2}}$$

Série 2 : fonction réciproque

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{1-x^2}-2+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}+2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}=x\ .$$

Or pour tout x de $]-1,1[$, $f\left[f^{-1}(x)\right]=x$, donc pour tout x de $]-1,1[$, $f^{-1}(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ par f(x) = $\sqrt{x^2-x+1}$.

1. La fonction $x\mapsto x^2-x+1$ est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ donc f est continue sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. La fonction $x\mapsto x^2-x+1$ est dérivable et strictement positive sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ donc f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. Pour tout x de $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}>0$.

   IL en résulte que f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. D'où f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}\right[=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x(x-1)+1}\right[=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$

2. On a : $\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ f(x)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\\ f^{-1}(y)=x\end{cases}$

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=y\Leftrightarrow x^2-x+1=y^2\Leftrightarrow x^2-x+1-y^2=0$

Le discriminant de l'équation du second degré obtenue est $\Delta=1-4\left(1-y^2\right)=4y^2-3$

Les solutions sont donc : $x'=\frac{1-\sqrt{4y^2-3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4y^2-3}}{2}\leq\frac{1}{2}$ et $x'=\frac{1+\sqrt{4y^2-3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{4y^2-3}}{2}\geq\frac{1}{2}$.

Ainsi , $x=x'\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4y^2-3}}{2}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4y^2-3}}{2}$.

Par suite, pour tout x de $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}$.

Série 2 : fonction réciproque

3. On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(x)=f^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)$.

a) Pour tout x de $[0,1[$,

$$g(x)=f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\frac{2}{\pi}x\right)}\right)^2-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

Or pour tout x de $[0,1[$, $\frac{\pi}{2}x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\geq 0$ par suite : $g(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

b) g est continue et dérivable sur $[0,1[$ et pour tout x de $[0,1[$, $g'(x)=\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\left[1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]>0$

Donc g est strictement croissante sur $[0,1[$. Par conséquent, g réalise une bijection de $[0,1[$ sur

$$K=g([0,1[)=\left[g(0),\lim_{x\to 1^-}g(x)\right[=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[.$$

c) On a : $\begin{cases}x\in[0,1[\\ g(x)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ g^{-1}(y)=x\end{cases}$

$$\left(g^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{g'(x)}=\frac{4}{\pi\sqrt{3}\left[1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}$$

Or $g(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=y\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{2y-1}{\sqrt{3}}$

Il en résulte : $\left(g^{-1}\right)'(y)=\dfrac{4}{\pi\sqrt{3}\left[1+\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}=\dfrac{4}{\pi\sqrt{3}\left[1+\frac{4y^2-4y+1}{3}\right]}=\dfrac{\sqrt{3}}{\pi\left(y^2-y+1\right)}$

Ainsi, pour tout x de $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{\pi\ x^2-x+1}$.